CHAPITRE 2

# LES EFFETS DE L'INERTIE DE L'EAU : SURPRESSIONS ET DÉPRESSIONS DANS LES CONDUITES CONSÉCUTIVES AUX MANŒUVRES DE VANNAGE (COUPS DE BÉLIER), OSCILLATIONS DANS LES CHEMINÉES D'ÉQUILIBRE

## 2.1. Avant-propos.

Ce chapitre ne constitue pas une étude générale des coups de bélier, ni des oscillations dans les cheminées d'équilibre, ce qui dépasserait largement le cadre de cet ouvrage. Le lecteur trouvera, toutefois, dans les références bibliographiques l'indication d'un certain nombre de publications traitant de ces sujets.

En ce qui nous concerne, il s'agit principalement de montrer le mécanisme des phénomènes et d'en définir les incidences sur la régulation des turbines.

Nous nous limiterons au cas de l'installation représentée schématiquement par la figure 2.1. La conduite sera à caractéristique unique et, pour plus de clarté, nous étudierons le coup de bélier au moyen de la méthode graphique

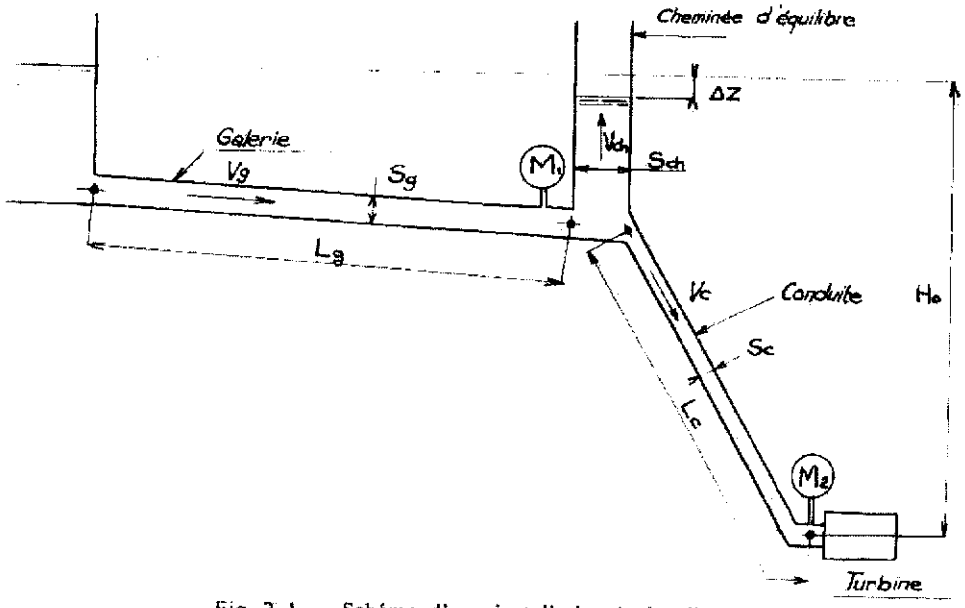


Fig. 2.1. — Schéma d'une installation hydraulique.

de Schnyder-Bergeron dont on pourra trouver un exposé détaillé dans l'ouvrage « Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité » de L. Bergeron.

Dans l'installation ainsi schématisée la turbine est assimilée à un obturateur placé en aval. Toute manœuvre de cet obturateur modifie le débit donc la vitesse d'écoulement de l'eau dans la galerie et la conduite, il en résulte des variations de pression causées par l'inertie du fluide. En raison de l'élasticité de l'eau et des parois ces variations de pression et de débit qui prennent naissance au niveau de l'obturateur, ne se propagent pas instantanément mais par ondes. Le rôle de la cheminée d'équilibre est de protéger la galerie en charge, généralement beaucoup plus longue que la conduite, des ondes de pression provenant de celle-ci. Elle contribue également à réduire l'amplitude des oscillations de pression dans cette dernière.

Pour analyser les phénomènes qui se produisent à la suite d'une manœuvre du vannage de la turbine supposons deux manomètres $M_1$ et $M_2$ placés respectivement à l'aval de la galerie et à la base de la conduite. Le manomètre supérieur $M_1$ va enregistrer une oscillation de pression de très longue période (plusieurs dizaines de minutes) en même temps que se produit, en synchronisme avec ses indications, une oscillation du niveau de la chambre d'équilibre. Sur le manomètre inférieur $M_2$ vont apparaître deux oscillations de pression de natures totalement distinctes, la première en phase avec celle enregistrée sur $M_1$, la seconde de période beaucoup plus courte (de l'ordre de quelques secondes) provoquée par les ondes de pression qui se propagent dans la conduite.

Nous nous trouvons ainsi en présence de deux phénomènes distincts, le coup de bélier, d'origine élastique, qui se produit dans la conduite et l'oscillation dans la cheminée qui s'apparente aux oscillations des liquides dans les vases communicants. Ces deux phénomènes sont liés en ce sens que le premier est à l'origine du second mais, en raison de la différence extrême de leurs périodes propres, le coup de bélier est souvent amorti lorsque les oscillations de la chambre d'équilibre commencent à se manifester.

Bien que le phénomène soit plus complexe nous commencerons l'étude par celle du coup de bélier.

## 2.2. **Surpressions et dépressions dans les conduites consécutives aux manœuvres de vannage** (Coups de bélier).

### 2.2.1) *Méthode d'étude.*

Les variations de pression et de débit se transmettent, non instantanément, mais par ondes avec une vitesse dite célérité des ondes de coup de bélier donnée par la formule d'Allievi :

$$\frac{1}{a^2} = \rho\left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{E.e}\right] \qquad 1)$$

dans laquelle :

$a$ est la célérité de l'onde en m/s,
$\rho$, la masse volumique de l'eau : $10^{-3}$ kg/cm$^3$,
$\varepsilon$, le module d'élasticité de l'eau : $2{,}02.10^4$ bars,
$E$, le module d'élasticité du métal de la conduite : $2{,}05.10^6$ bars,
$D$ et $e$, respectivement le diamètre et l'épaisseur de la conduite.

Par exemple pour $D = 1$ m et $e = 1$ cm on trouve $a = 1\,000$ m/s.

La théorie analytique du coup de bélier conduit à deux groupes d'équations, le premier caractérise la propagation des ondes de pression le long de la conduite, le second définit les conditions aux limites c'est-à-dire aux extrémités de la conduite.

La méthode de Schnyder-Bergeron consiste à faire apparaître graphiquement ces deux systèmes d'équations dans le plan de coordonnées débit ($Q$) pression ($H$). Par pression il faut entendre pression totale c'est-à-dire la pression en un point de la conduite à laquelle on ajoute la cote par rapport à une altitude quelconque, en général celle de l'orifice aval. Dans ces conditions, en régime permanent, la pression $H$ est la même en tout point de la conduite et égale à $H_0$ ce qui revient à considérer la conduite fictive $C_1$ au lieu de la conduite réelle $C$, voir figure 2.2.

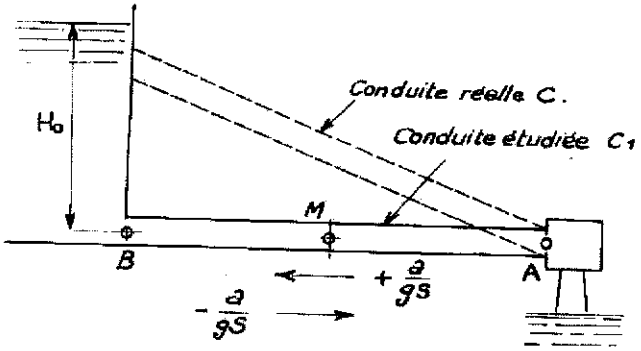


Fig. 2.2. — Principe de la méthode de Bergeron. Schématisation de la conduite.

Le premier système d'équations caractérise deux droites dites *droites d'ondes* que l'on définit en imaginant un observateur qui se déplace avec la célérité $a$ de l'onde de pression le long de la conduite. Si cet observateur se déplace dans le sens de l'écoulement, il voit l'état débit-pression des points par lesquels il passe représenté sur le diagramme $H(Q)$ par une droite de pente $-a/g.S$ ($S$, section de conduite). Si le déplacement de l'observateur a lieu en sens inverse le coefficient de la droite d'onde est : $+a/g.S$.

Les *caractéristiques d'extrémités* de la conduite sont définies par les fonctions $H(Q)$ en ces points à l'instant considéré. A l'extrémité amont $B$ la pression est constante et égale à $H_0$, la caractéristique est donc l'horizontale $H = H_0$

quel que soit le temps. A l'extrémité aval $A$ se trouve une turbine que nous assimilerons à un obturateur dont la loi de débit est :

$$Q = \alpha . S(\theta) \sqrt{2g.H}$$

$S$, section de passage offerte, fonction du temps $\theta$.

Ce qui, en toute rigueur, n'est vrai que pour les machines de faibles et moyennes vitesses spécifiques.

Si $Q_0$ est le débit sous la chute normale $H_0$, il vient :

$$\frac{Q}{Q_0} = \sqrt{\frac{H}{H_0}}.$$

Les caractéristiques d'extrémité $A$ sont donc constituées par une famille de paraboles pour lesquelles le degré d'ouverture du vannage figure comme paramètre. Si $S(\theta)$ est une fonction linéaire du temps (ouverture ou fermeture dites linéaires), $MN = NP = PR$, sur la figure 2.3.

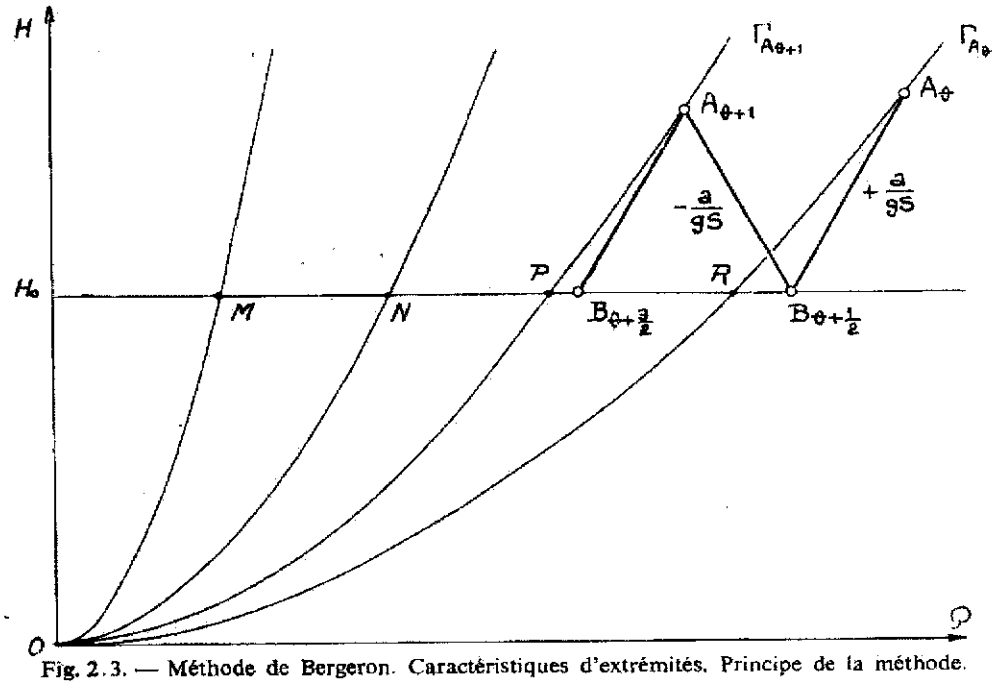


Fig. 2.3. — Méthode de Bergeron. Caractéristiques d'extrémités. Principe de la méthode.

Un point quelconque du diagramme $H(Q)$ représente ainsi l'état débit-pression à un moment déterminé en un point de la conduite caractérisé par son abscisse. En général, on ne considère que les extrémités et l'unité de temps choisie, variable avec chaque installation, est prise égale à la durée d'un aller-retour de l'onde dans la conduite :

$$\mu = \frac{2L}{a} \qquad L, \text{ longueur de la conduite}.$$

Pour montrer l'application de la méthode supposons connu (Fig. 2.3) l'état débit-pression en $A$ au temps $\theta$ représenté par le point $A_\theta$ du plan $H(Q)$, point situé sur la caractéristique d'extrémité $A$ au temps $\theta$ ; parabole $\Gamma_{A\theta}$. L'observateur de Bergeron part de $A$ au temps $\theta$ se dirigeant vers $B$, il voit l'état débit-pression des points par lesquels il passe représenté par une droite d'onde de pente $+ a/g.S$ issue de $A_\theta$. Il arrive en $B$ au temps $\theta + \frac{1}{2}$, le point représentatif de l'état débit-pression en $B$ à ce moment se trouve d'une part sur cette première droite d'onde et d'autre part sur la caractéristique d'extrémité $B$ à ce moment qui est, comme à tous les temps d'ailleurs, l'horizontale $H_0$, d'où $B_{\theta+\frac{1}{2}}$. L'observateur part de $B$ au temps $\theta + \frac{1}{2}$ se dirigeant vers $A$, nouvelle droite d'onde issue de $B_{\theta+\frac{1}{2}}$ de pente $- a/g.S$, arrivée en $A$ au temps $\theta + 1$. Le point représentatif de l'état débit-pression en $A$ au temps $\theta + 1$ se trouve à la fois sur cette droite et sur la caractéristique d'extrémité $\Gamma_{A\theta+1}$ qui peut être différente de $\Gamma_{A\theta}$ si l'obturateur a été manœuvré dans l'intervalle de temps $\theta$, $\theta + 1$, ce qui est le cas de la figure où un mouvement de fermeture a été opéré. L'épure peut évidemment se poursuivre donnant l'état débit-pression aux extrémités de la conduite à chaque unité de temps.

La méthode peut aussi donner l'état débit-pression en un point quelconque de la conduite, à condition de connaître l'état débit-pression aux extrémités à des moments convenables. Par exemple (Fig. 2.4), supposons connus $A_\theta$ et $B_\theta$ et imaginons deux observateurs partant respectivement de $A$ et de $B$ à ce même moment, ils se rencontreront en $M$, milieu de la conduite, au temps $\theta + \frac{1}{4}$, à ce point correspond sur le diagramme $H(Q)$ le point $M_{\theta+\frac{1}{4}}$ intersection des droites d'ondes issues de $A_\theta$ et $B_\theta$ et de pentes respectives $+ a/g.S$ et $- a/g.S$.

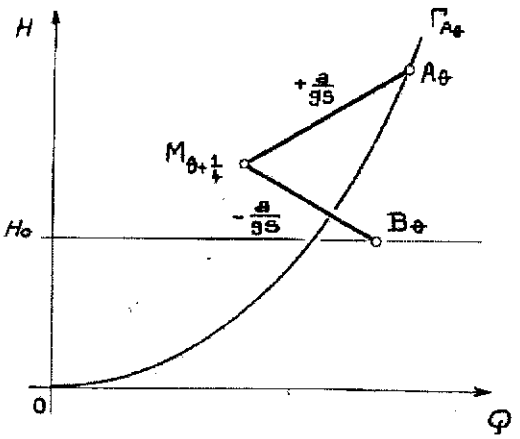


Fig. 2.4. — Détermination de l'état débit-pression en un point de la conduite.

Nous avons convenu dans cet exposé de nous limiter à la conduite à caractéristique unique c'est-à-dire de diamètre et épaisseur uniformes, la célérité de l'onde et la pente des droites d'ondes sont ainsi les mêmes en tout point de la conduite. D'autre part, en régulation, les écarts relatifs $\Delta h$ sont plus intéressants que les valeurs absolues. Nous pouvons ainsi substituer aux coordonnées $H$ et $Q$ les coordonnées, dites d'Allievi, $\rho$ et $\Delta h$ définies par :

$$\Delta h = \frac{H - H_0}{H_0} = \frac{\Delta H}{H_0} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{a.Q}{2g.S.H_0} = \frac{a.V}{2gH_0}$$

$Q$ et $V$ respectivement débit et vitesse d'écoulement dans la conduite. $\rho$ est dit paramètre d'Allievi.

Dans ces conditions les pentes des droites d'ondes deviennent :

$$\frac{\Delta h}{\rho} = 2\frac{\Delta H}{Q} \cdot \frac{gS}{a} = 2 \times (\pm 1) \text{ c'est-à-dire respectivement } +2 \text{ et } -2$$

et la caractéristique d'extrémité $A$ s'exprime :

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{\frac{H + H_0}{H_0}} = \sqrt{1 + \Delta h} \qquad 2)$$

et se trouve représentée par une parabole de sommet $(0, -1)$ passant par le point $(\rho_0, 0)$.

En fait les écarts de pression tolérés sont relativement faibles (au maximum 15 à 20 %), on peut sans grande erreur confondre $(1 + \Delta h)^{\frac{1}{2}}$ et $(1 + \Delta h/2)$, la caractéristique d'extrémité $A$ devient ainsi une droite passant par les points $(0, -2)$ et $(\rho_0, 0)$ (Fig. 2.5), ce qui contribue à simplifier l'épure des surpressions.

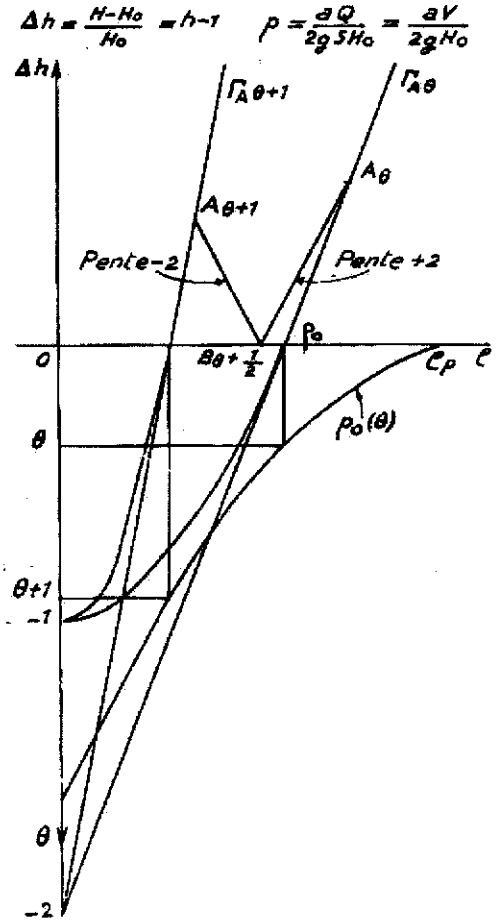


Fig. 2.5. — Epure des surpressions dans les coordonnées d'Allievi. Principe.

On peut encore compléter la figure en portant la loi de manœuvre, qui représente l'ouverture en fonction du temps c'est-à-dire $\rho_0(\theta)$ et se trouve proportionnelle au débit sous chute constante. Il suffit de porter $\theta$ en ordonnées du côté négatif. Cette courbe peut n'être utilisée que partiellement (fermeture ou ouverture à partir d'une charge partielle, $\rho_0 < \rho_p$). Dans une manœuvre dite linéaire $\rho_0(\theta)$ est évidemment une droite.

Les choses ne se passent pas de la même façon suivant que la durée de manœuvre est supérieure ou inférieure à l'unité de temps. Nous distinguerons donc les manœuvres brusques qui s'effectuent en un temps inférieur à celui de l'aller-retour d'onde et les manœuvres progressives. Nous allons en étudier quelques-unes.

2.2.2) *Surpressions et dépressions provoquées par des manœuvres de fermeture.*

2.2.2.1) *Fermeture brusque totale* (Fig. 2.6).

Au temps $\theta = 0$, début de fermeture, la caractéristique de $A$ est en $A_0(0, \rho_p)$. L'observateur parti de $A$ au temps zéro (immédiatement avant le début de fermeture) arrive en $B$ au temps $\frac{1}{2}$ juste avant l'arrivée de l'onde en ce point, la caractéristique de $B$ à ce moment est $B_{\frac{1}{2}}$ confondue avec $A_0(0, \rho_p)$. L'observateur parti de $B$ au temps $\frac{1}{2}$ voit le point figuratif de l'état débit-pression se déplacer sur la droite de pente $-2$ issue de $B_{\frac{1}{2}}$, il arrive en $A$ au temps 1, à ce moment la fermeture est achevée et la caractéristique d'extrémité $A$ est confondue avec l'axe des ordonnées ($\rho = 0$) d'où $A_1$. A l'observateur parti de $A$ au temps 1 correspond une droite d'onde de pente $+2$ issue de $A_1$, cet observateur arrive en $B$ au temps $\frac{3}{2}$, le point figuratif $B_{\frac{3}{2}}$ se trouve sur la droite précédente et sur l'axe des abscisses. Et ainsi de suite. On constate qu'en $A$, après la fermeture totale, c'est-à-dire à partir du temps 1 les pressions oscillent indéfiniment entre les valeurs :

$$\Delta h_m = 2\rho_p \qquad \left(\Delta H_m = \frac{aV_0}{g}\right)$$

$$\text{et} \qquad -\Delta h_m = -2\rho_p$$

et qu'en $B$, à partir du temps $\frac{1}{2}$, les débits oscillent indéfiniment de $+\rho_p$ à $-\rho_p$.

La construction ajoutée sur la figure montre la manière d'obtenir les états caractéristiques en un point de la conduite pour un temps quelconque.

En réalité, les pertes de charge causent l'amortissement du phénomène comme on peut le voir par l'épure de la figure 2.7. On tient compte des pertes de charge, qui dans la réalité sont uniformément réparties tout le long de la conduite, en les concentrant en un seul point $B$ sous la forme d'un diaphragme. Dans ces conditions la caractéristique amont de $B$ qui était jusqu'ici l'axe

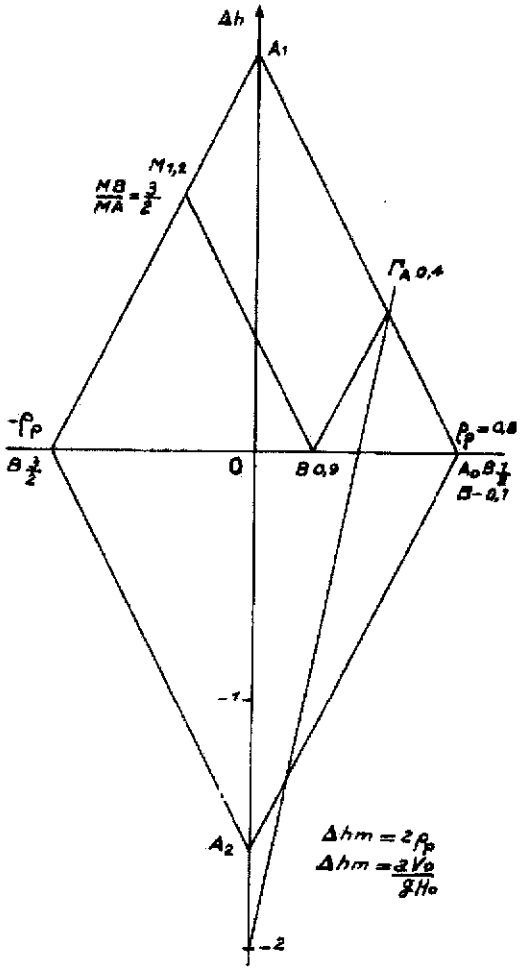


Fig. 2.6. — Epure de la fermeture brusque totale.

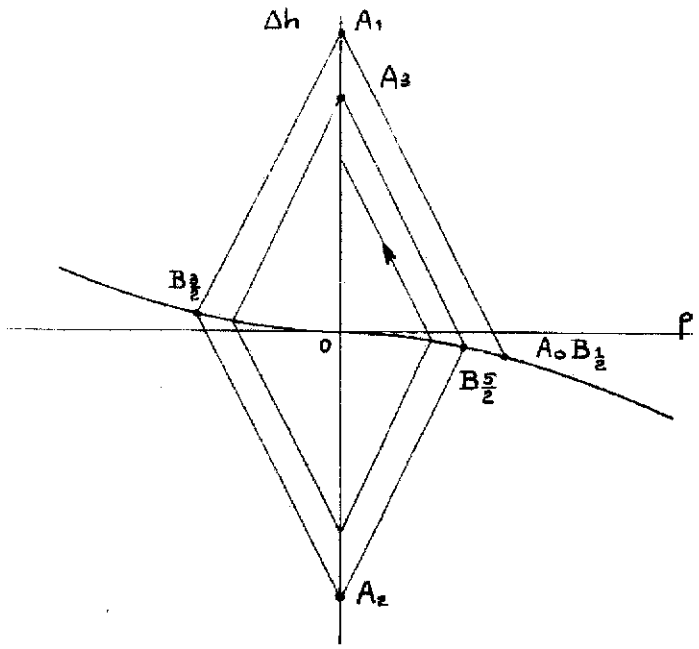


Fig. 2.7. — Amortissement des oscillations par pertes de charge.

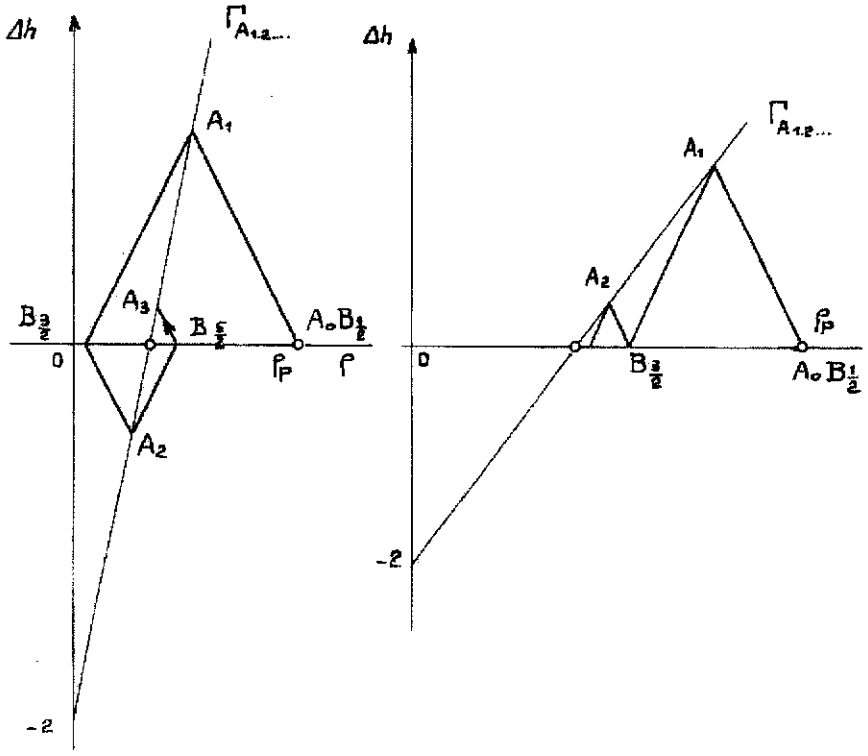


Fig. 2.8. — Amortissement des oscillations par fermeture incomplète.

$\rho$ est remplacée par la caractéristique débit-chute de pression d'un diaphragme, qui est une parabole située au-dessus de l'axe $\rho$ pour $\rho < 0$ et au-dessous pour $\rho > 0$.

Une fermeture incomplète provoque le même effet comme le montre la figure 2.8 Si la valeur finale de $\rho$ est supérieure à 1 la surpression tend vers 0 par valeurs positives.

2.2.2.2) *Fermeture progressive à partir de l'ouverture totale.*

L'épure se conduit de la même manière, voir la figure 2.9 construite avec $\theta_p = 5$ et $\rho_p = 1{,}5$ en supposant une loi de manœuvre linéaire. On termine également par une oscillation de pression théoriquement indéfinie.

2.2.2.3) *Fermeture progressive à partir d'une ouverture partielle.*

En gardant la loi de manœuvre linéaire définie dans l'exemple précédent (Fig. 2.9), on constate que la surpression maximale varie avec la valeur du paramètre $\rho_0$ de départ. On peut distinguer deux cas :

$\rho_0 \leqslant 1$. Le coefficient angulaire des droites d'ondes est inférieur à celui des caractéristiques d'extrémité $A$ (Fig. 2.10.*a*). La surpression maximale a lieu au premier temps. La similitude des triangles $ODC$ et $DA_1H$ conduit à :

$$\frac{\Delta h_m}{2} = \frac{DH}{OD} = \frac{\dfrac{\rho_p}{\theta_p} - \dfrac{\Delta h_m}{2}}{\rho_0 - \dfrac{\rho_p}{\theta_p}}$$

soit :

$$\Delta h_m = \frac{\dfrac{\rho_p}{\theta_p}}{\dfrac{1 + \rho_0}{2} - \dfrac{\rho_p}{2\theta_p}} \qquad 3)$$

dont la valeur maximale est atteinte pour $\rho_0 = \dfrac{\rho_p}{\theta_p}$ soit :

$$\Delta h_m = 2\frac{\rho_p}{\theta_p}. \qquad 4)$$

Cette surpression, dite de Michaud, est obtenue par une fermeture totale à partir d'une ouverture partielle correspondant à un temps de manœuvre égal à la durée d'un aller-retour d'onde. Cette manœuvre est la plus dangereuse que l'on puisse effectuer.

$\rho_0 \geqslant 1$. Le coefficient angulaire des droites d'ondes est supérieur à celui des caractéristiques d'extrémité $A$ tant que $\rho$ reste supérieur à un, la construc-

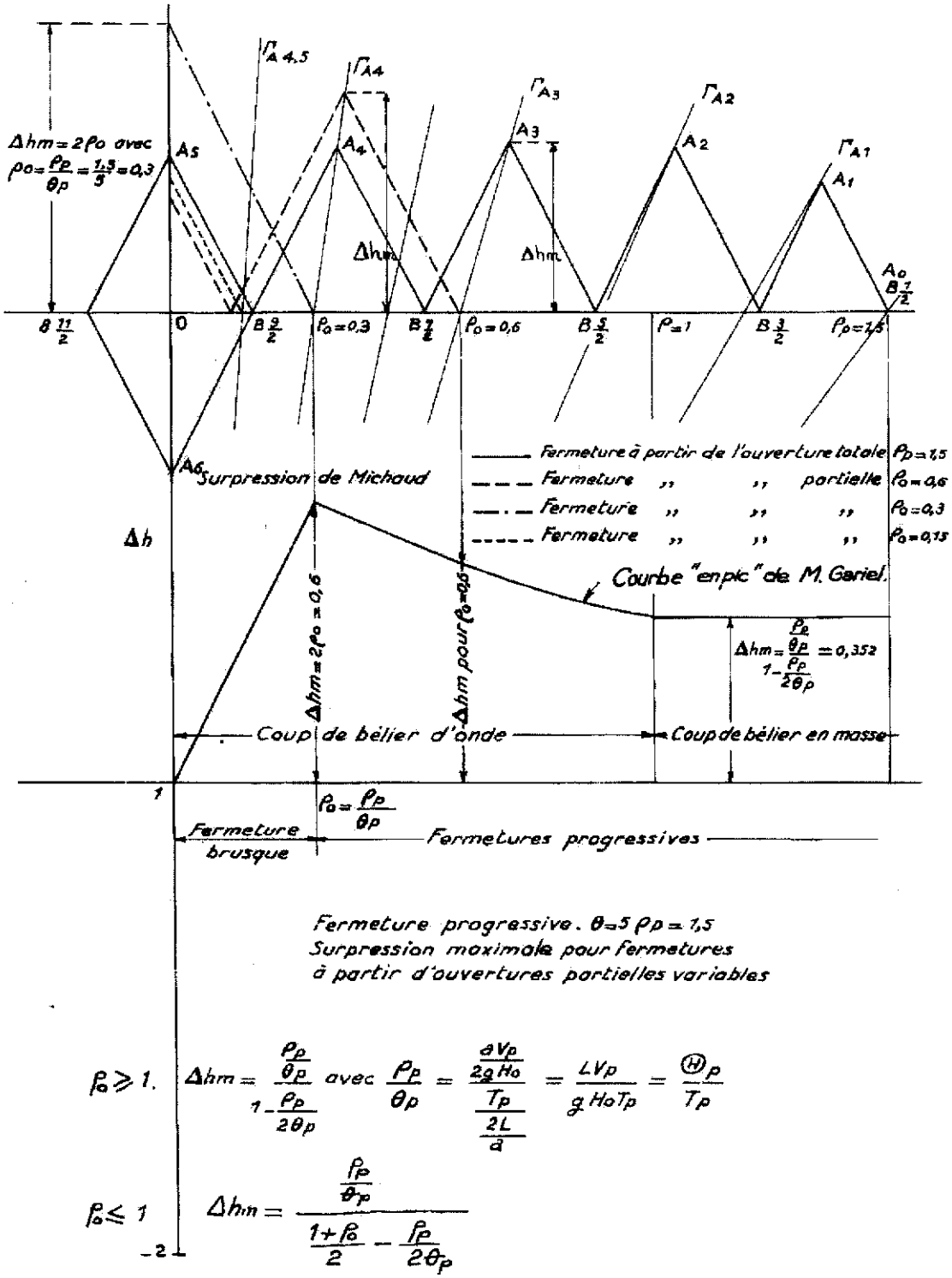


Fig. 2.9. — Epure de la fermeture progressive.

tion fait apparaître une surpression limite qui, atteinte par valeurs inférieures constitue la surpression maximale (Fig. 2.10.*b*). Soit $\Delta h_m$ cette surpression obtenue aux temps consécutifs $\theta$ et $\theta + 1$, la similitude des triangles $CDE$ et $C.A_{\theta+1}.A_\theta$ conduit à :

$$\frac{A_{\theta+1}.A_\theta}{DE} = \frac{2 + \Delta h_m}{2} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\Delta h_m}{\dfrac{\rho_p}{\theta_p}} = 1 + \frac{\Delta h_m}{2}$$

d'où :

$$\Delta h_m = \frac{\dfrac{\rho_p}{\theta_p}}{1 - \dfrac{\rho_p}{2\theta_p}} \qquad 5)$$

valeur indépendante du paramètre $\rho_0$ de départ ($\rho_0 \geqslant 1$).

Les formules 3 et 5 se raccordent évidemment pour la valeur $\rho_0 = 1$. La surpression maximale exprimée en fonction du paramètre $\rho_0$ de départ est représentée par le diagramme de la figure 2.9. Cette courbe est appelée courbe « en pic » de Maurice Gariel.

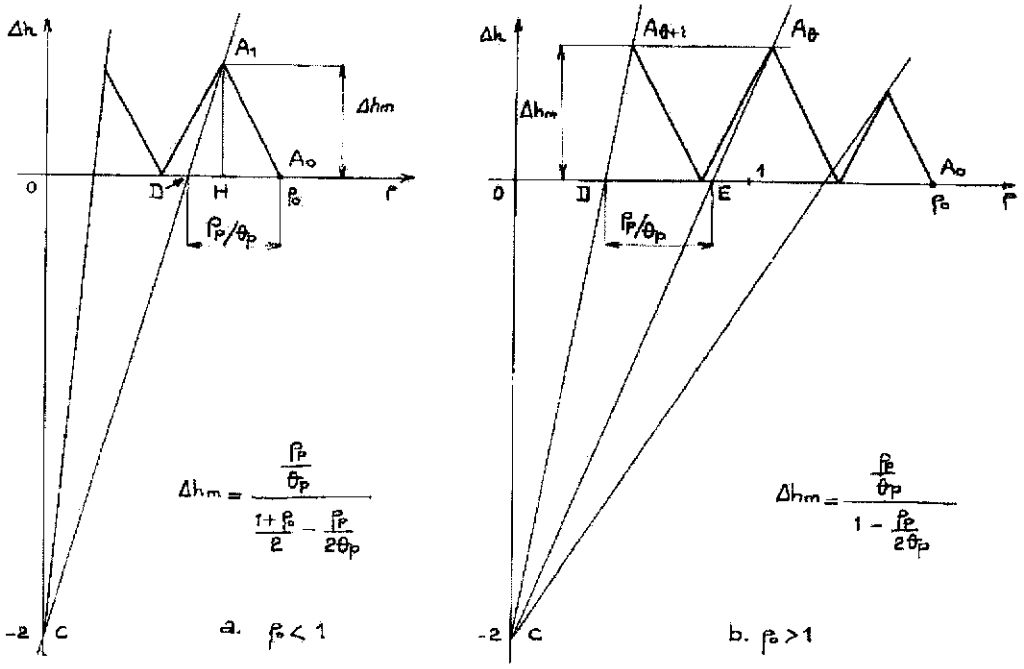


Fig. 2.10. — Fermeture progressive. Détermination de la surpression maximale.

2.2.3) *Manœuvres d'ouverture.*

2.2.3.1) *Ouverture brusque.*

Si $\rho_p > 1$ la manœuvre ne donne pas lieu à des valeurs positives de $\Delta h$, (Fig. 2.11.*b*). On montre facilement que :

$$\Delta h_m = \frac{2\rho_p}{1 + \rho_p}. \qquad 6)$$

Il n'en est pas de même si $\rho_p < 1$ où se produit une surpression dont la valeur maximale dépend d'ailleurs de $\rho_p$. On montre qu'elle est la plus élevée pour $\rho_p = \frac{1}{3}$ et que ce maximum a pour valeur $\Delta h = 0{,}25$. En aucun cas, par conséquent, une dépression due à une manœuvre d'ouverture ne peut être suivie d'une surpression de plus de 25 % (Fig. 2.11.*a*).

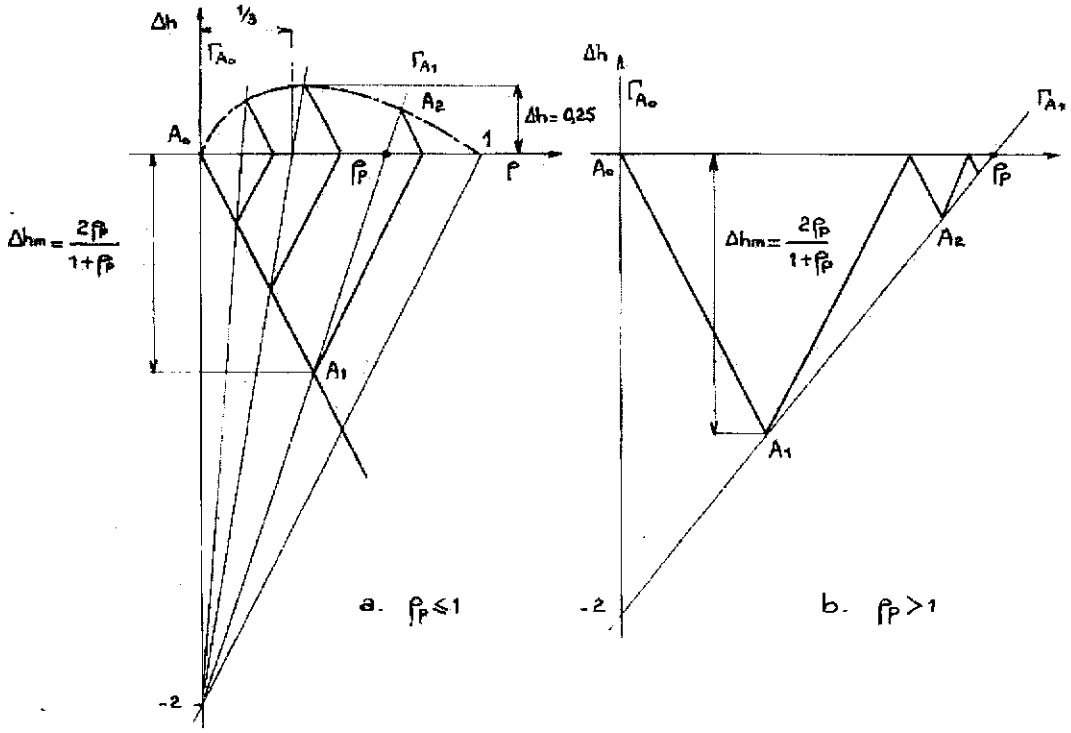


Fig. 2.11. — Epure de l'ouverture brusque.

2.2.3.2) *Ouverture progressive* (Fig. 2.12).

La dépression maximale a lieu au bout du temps $\frac{2L}{a}$, sa valeur est :

$$\Delta h_m = \frac{2\dfrac{\rho_p}{\theta_p}}{1 + \dfrac{\rho_p}{\theta_p}}. \qquad 7)$$

Pratiquement, une dépression n'est pas dangereuse par elle-même, les conduites étant généralement faites pour résister au vide, mais elle le devient si elle engendre une cavitation généralisée créant un vide qui se rebouche brutalement ensuite donnant lieu au phénomène du marteau d'eau dont les effets sont dévastateurs pour le matériel.

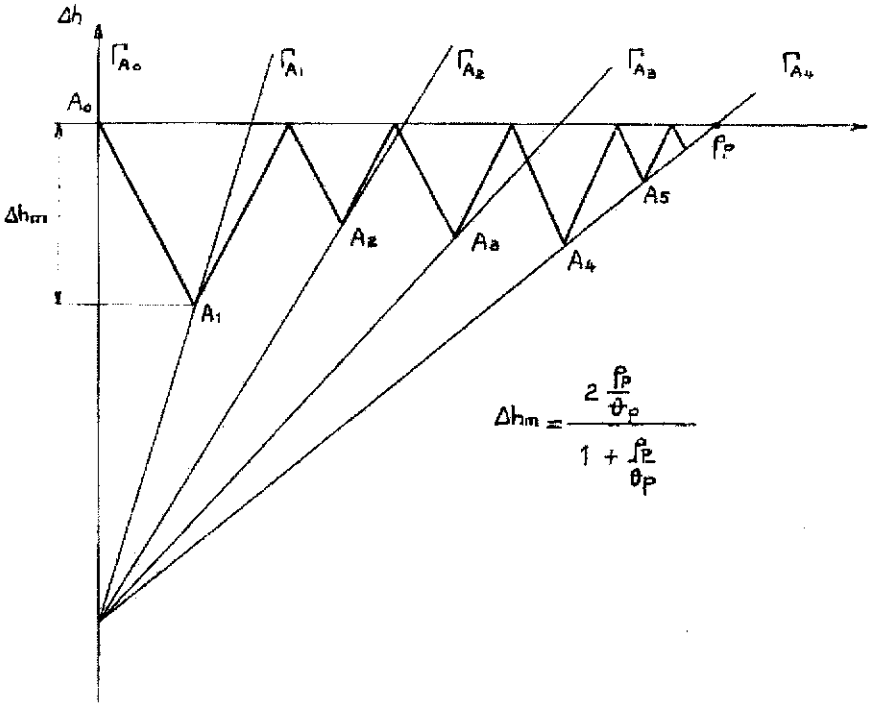


Fig. 2.12. — Epure de l'ouverture progressive.

2.2.4) *Loi de manœuvre limitant la surpression maximale.*

Il est possible en fermant de plus en plus lentement à mesure qu'on se rapproche de la fermeture complète de limiter la surpression maximale à une valeur déterminée.

La figure 2.13 montre l'établissement d'une loi de ce genre dans le cas : $\rho_p = 1{,}4$, $\Delta h_m = 0{,}15$.

Dans la partie $\rho_0 > 1$, la manœuvre sera linéaire et la vitesse de fermeture est donnée par la relation 5 :

$$0{,}15 = \frac{\dfrac{\rho_p}{\theta_p}}{1 - \dfrac{\rho_p}{2\theta_p}}$$

on obtient : $\dfrac{\theta_p}{\rho_p} = 7{,}17$ et $\theta_p = 10$.

A partir de $\rho_0 = 1$ il convient de ralentir. La figure indique la façon de procéder : considérons une fermeture à partir de l'ouverture partielle $\rho_0 = 1$, au premier temps suivant, le point représentatif se trouve sur la droite d'onde issue de $\rho_0 = 1$ et sur l'horizontale $\Delta h_m = 0{,}15$, par ce point $A_1$ passe donc la caractéristique d'extrémité au premier temps après le début de cette manœuvre. On considère ensuite une fermeture à partir de l'ouverture partielle définie par $\rho_0'$ et ainsi de suite.

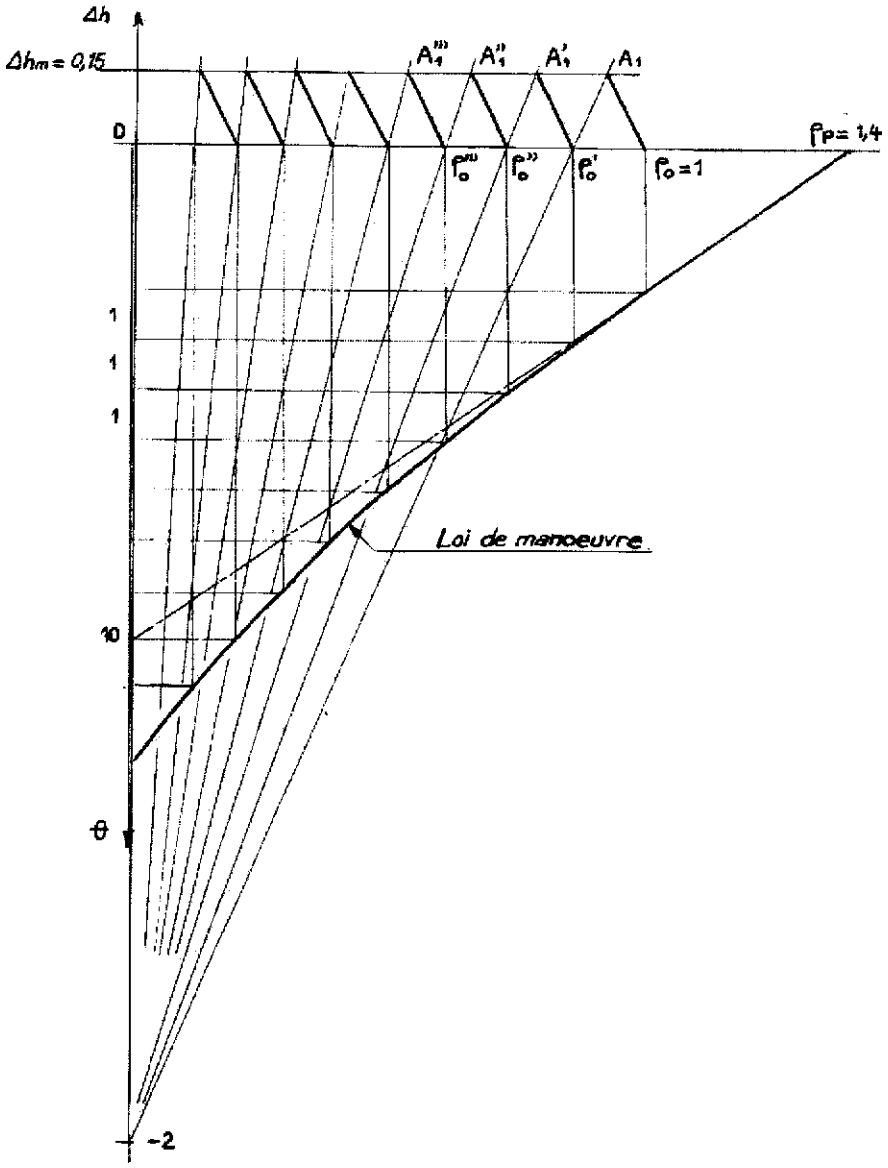


Fig. 2.13. — Etablissement d'une loi de fermeture non linéaire pour une surpression maximale de 15 % à partir de $\rho_p = 1{,}4$.

Une loi de ce genre, si elle diminue la surpression, augmente la durée totale de manœuvre accroissant ainsi la survitesse, comme nous le verrons plus loin. Elle conduit de plus à des complications mécaniques. Elle est rarement employée.

2.2.5) *Coup de bélier en masse.*

Lorsque la conduite est courte le temps d'aller-retour d'onde devient négligeable devant le temps de manœuvre. Pratiquement les variations de débit et de pression se transmettent instantanément et tout se passe comme si le fluide était incompressible et la conduite infiniment rigide. C'est le domaine du coup de bélier en masse que nous allons étudier.

2.2.5.1) *Détermination de la surpression maximale consécutive à une manœuvre de fermeture.*

Appliquons la loi fondamentale de la mécanique à la colonne liquide de longueur $L$ contenue dans la conduite, figure 2.14 :

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = \Sigma \text{ forces extérieures}$$

$$\frac{S.L.\varpi}{g} \cdot \frac{dV}{dt} = - S.\varpi.\Delta H \quad 8)$$

(les forces de frottement étant négligées)

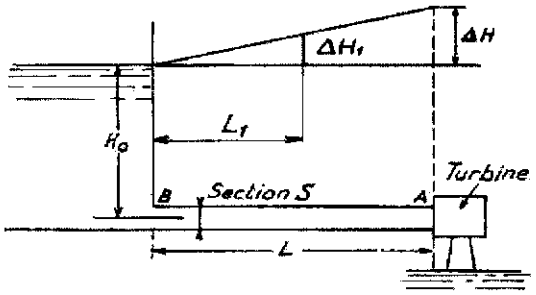


Fig. 2.14. — Coup de bélier en masse.

soit :

$$\Delta H = - \frac{L}{g} \frac{dV}{dt}$$

en faisant apparaître la surpression relative $\Delta h = \frac{\Delta H}{H_0}$ et la vitesse $V_p$ d'écoulement pour le débit normal sous la chute $H_0$, cette expression devient :

$$\Delta h = - \frac{LV_p}{gH_0} \cdot \frac{d\frac{V}{V_p}}{dt} = - \Theta \frac{d\frac{V}{V_p}}{dt} \quad 9)$$

en posant $\Theta = \frac{LV_p}{gH_0}$ temps caractéristique de l'inertie de l'eau dans la conduite.

Supposons une manœuvre linéaire de l'orifice situé en $A$, ce qui signifie que la section de passage offerte au fluide varie linéairement mais non le débit car la fermeture crée une surpression qui réagit sur le débit. Au temps $t$ de la manœuvre la chute est devenue $H = H_0 + \Delta H$ et la vitesse $V$, on peut écrire :

$$\frac{V}{V_0} = \sqrt{\frac{H_0 + \Delta H}{H_0}} = \sqrt{1 + \Delta h}$$

$V_0$ représentant la vitesse qu'aurait le fluide si la chute était restée $H_0$, cette vitesse varie linéairement comme la section de passage offerte :

$$V_0 = V_p\left(1 - \frac{t}{T}\right) \qquad \text{et} \qquad V = V_p\left(1 - \frac{t}{T}\right)(1 + \Delta h)^{\frac{1}{2}}$$

$T$ représentant le temps total de manœuvre de l'obturateur.

A $(1 + \Delta h)^{\frac{1}{2}}$ on peut, comme nous l'avons vu, substituer $\left(1 + \frac{\Delta h}{2}\right)$ ; l'expression 9 devient :

$$\Delta h = -\Theta\left[-\frac{1}{T}\left(1 + \frac{\Delta h}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{T}\right)\frac{d\Delta h}{dt}\right]. \qquad 10)$$

La valeur maximale de $\Delta h$ correspond à $\frac{d\Delta h}{dt} = 0$ soit :

$$\Delta h_m = \frac{\frac{\Theta}{T}}{1 - \frac{\Theta}{2T}}. \qquad 11)$$

Pour voir la manière dont la pression tend vers cette valeur il faut résoudre l'équation différentielle 10 qui s'écrit en séparant les variables :

$$\frac{\Theta}{2}\left(1 - \frac{t}{T}\right)\frac{d\Delta h}{dt} + \left(1 - \frac{\Theta}{2T}\right)\Delta h - \frac{\Theta}{T} = 0$$

et en divisant par $\frac{\Theta}{T}$

$$\frac{T}{2}\left(1 - \frac{t}{T}\right)\frac{d\Delta h}{dt} + \frac{1 - \frac{\Theta}{2T}}{\frac{\Theta}{T}} \cdot \Delta h - 1 = 0$$

soit :

$$\frac{d\,\frac{\Delta h}{\Delta h_m}}{1 - \frac{\Delta h}{\Delta h_m}} = \frac{2}{\Delta h_m}\,\frac{d\,\frac{t}{T}}{1 - \frac{t}{T}}$$

qui s'intègre par :

$$1 - \frac{\Delta h}{\Delta h_m} = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{2/\Delta h_m} \qquad 12)$$

montrant que la surpression maximale est atteinte au temps $t = T$, c'est-à-dire en fin de fermeture.

2.2.5.2) *Remarques.*

— Si le diamètre de conduite n'est pas uniforme, il suffit de remplacer dans l'expression de $\Theta$, $LV_p$ par $\Sigma LV$, $L$ et $V$ relatifs à chaque élément de conduite de section uniforme.

— Si l'obturateur est en amont le même calcul donne la dépression en aval consécutive à une fermeture, cette dépression peut être limitée par le vide.

— *Interprétation physique du temps* $\Theta$. La vitesse d'écoulement dans la conduite débitant à gueule bée, sans pertes de charge est :

$$V_b = \sqrt{2gH_0}\,.$$

La conduite étant obturée à l'aval, on ouvre instantanément le robinet, voyons comment l'eau atteindra sa vitesse de gueule bée. L'équation fondamentale s'écrit :

$$H_0 - \frac{V^2}{2g} = \frac{L}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

ou :

$$\frac{L}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \frac{V^2 - V_b^2}{2g} = 0$$

soit encore :

$$\frac{LV_b}{gH_0} \times \frac{\mathrm{d}\dfrac{V}{V_b}}{\mathrm{d}t} + \frac{V^2 - V_b^2}{2gH_0} = \frac{LV_b}{gH_0}\frac{\mathrm{d}\dfrac{V}{V_b}}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{V}{V_b}\right)^2 - 1 = 0$$

qui s'intègre par :

$$\frac{V}{V_b} = th\,\frac{gH_0}{LV_b}\,.\,t\,.$$

Le temps nécessaire pour atteindre la vitesse $V_p < V_b$ est donné par :

$$\frac{V_p}{V_b} = th\,\frac{gH_0}{LV_b}\,.\,t\,.$$

Si $V_p$ est petit vis-à-vis de $V_b$ ce qui est habituellement le cas, on peut confondre $\dfrac{gH_0}{LV_b}\,.\,t$ et $th\,\dfrac{gH_0}{LV_b}\,.\,t$

d'où :

$$t = \frac{V_p}{V_b}\,.\,\frac{LV_b}{gH_0} = \frac{L.V_p}{gH_0} = \Theta\,.$$

Le temps $\Theta$ caractéristique de la conduite débitant à la vitesse $V_p$ est le temps que met l'eau partant du repos pour atteindre cette vitesse mais dans le cas seulement où cette dernière est faible vis-à-vis de la vitesse de gueule bée.

— L'eau étant supposée incompressible, la loi de variation du débit pendant la fermeture est la même en tout point de la conduite, il en est de même de $\frac{dV}{dt}$ à un instant donné. Si la distance du point considéré à la prise d'eau est $L_1$ la surpression $\Delta H_1$ en ce point est :

$$\Delta H_1 = \frac{L_1}{g} \cdot \frac{dV}{dt}$$

$\frac{\Delta H_1}{L_1}$ est constant le long de la conduite, la surpression se répartit donc proportionnellement à la distance de la prise d'eau (Fig. 2.14).

— Pour $\rho_0 > 1$ la surpression maximale dans le cas du coup de bélier d'onde est donnée par la formule 5 dans laquelle :

$$\rho_p = \frac{a.V_p}{2gH_0} \qquad \theta_p = \frac{T}{\mu} = \frac{aT}{2L}$$

soit :

$$\frac{\rho_p}{\theta_p} = \frac{\Theta}{T}.$$

On constate que dans ce cas les formules 5 et 11 sont identiques, ce qui est normal, car lorsque $\rho_p$ est grand ainsi que $\theta_p$ c'est-à-dire que le temps de manœuvre comprend un grand nombre d'allers-retours d'ondes, tout se passe comme si les ondes avaient une célérité très grande. Il convient de remarquer que $\rho_p$ ne peut être grand sans que $\theta_p$ le soit aussi afin d'éviter des surpressions dépassant les valeurs habituelles.

2.2.6) *Cas des turbines à réaction. Coup de bélier d'aspiration.*

La fermeture du vannage d'une turbine à réaction (Francis ou hélice) produit en même temps qu'une surpression dans la conduite en amont du distributeur une dépression dans l'aspirateur en aval. En toute rigueur les deux phénomènes ne sont pas indépendants puisqu'ils agissent tous les deux sur le débit, lequel réagit à son tour sur les pressions, il faudrait donc conduire à la fois les deux épures sur le même graphique de Bergeron, en pratique il est généralement possible de procéder plus simplement.

Si la conduite est beaucoup plus longue que l'aspirateur, ce sont surtout les variations de pression dans celle-ci qui influencent le débit, on peut ainsi sans grande erreur séparer les deux éléments ; on fait d'abord l'épure des surpressions en amont qui donne les variations de débit en fonction du temps,

puis on tire de ces variations de débit les variations de pression en aval par la théorie du coup de bélier en masse applicable à l'aspirateur qui est généralement court.

Si la conduite et l'aspirateur sont d'égale importance et suffisamment courts l'un et l'autre, ce qui est le cas des installations de basses chutes on calcule le coup de bélier en masse en supposant l'obturateur placé à la sortie de l'aspirateur :

$$\Delta h_m = \frac{\dfrac{\Sigma LV}{gH_0\,T}}{1 - \dfrac{\Sigma LV}{2gH_0\,T}} \qquad 13)$$

avec $\Sigma LV$ étendu à la conduite, la bâche et l'aspirateur. Puis on répartit ce résultat en une surpression dans la conduite et la bâche et une dépression dans l'aspirateur au prorata des $\Sigma LV$ de chacun de ces éléments.

Il faut évidemment éviter le vide complet dans l'aspirateur en raison du danger que présente le recollement de la colonne liquide : soulèvement du rotor, bris des pales de roue Kaplan...

Les groupes particulièrement exposés sont munis de ventouses (Fig. 4.101, 4.102) 1re partie, manœuvrées par le régulateur avec le vannage qui laissent entrer de l'air pour briser le vide.

## 2.3. Oscillations dans les cheminées d'équilibre.

2.3.1) *Equations des oscillations en masse dans une cheminée d'équilibre simple.*

La cheminée d'équilibre simple, la seule que nous considérerons, est constituée par un puits de section droite constante $S_{ch}$. Le conduit d'amenée est à écoulement sous pression, ses parois supposées rigides et l'eau admise incompressible. En conséquence le liquide se déplace en bloc sur toute la longueur de la galerie et les ondes de pression se propagent instantanément.

L'application de la loi fondamentale de la mécanique à la masse d'eau contenue dans la galerie conduit à : (Fig. 2.15)

$$\frac{\varpi}{g}.S_g.L_g\frac{dV_g}{dt} = \Sigma \text{ projection des forces extérieures.}$$

Le second membre de l'équation est constitué par la résultante des forces pressantes agissant sur les sections d'entrée et de sortie :

$$-\ \varpi.S_g.\Delta Z$$

La projection des forces de frottement (pertes de charge) :

$$-\ \varpi.S_g.k'_g.V_g^2$$

d'où :

$$\frac{L_g}{g}\frac{dV_g}{dt} + \Delta Z \pm k'_g V_g^2 = 0 \qquad 14)$$

(signe + lorsque l'eau s'écoule de la retenue vers la cheminée).

Equation d'écoulement dans la cheminée :

$$V_g S_g = S_{ch}\frac{d\Delta Z}{dt} + Q \qquad 15)$$

$Q$ représentant le débit dans la conduite forcée en direction des turbines.

Nous allons appliquer ces relations dans deux cas, celui d'une fermeture brusque afin d'illustrer le mécanisme du fonctionnement de la cheminée d'équilibre et celui des petits mouvements de vannage afin d'obtenir les équations de l'installation intervenant dans l'étude de la stabilité de réglage.

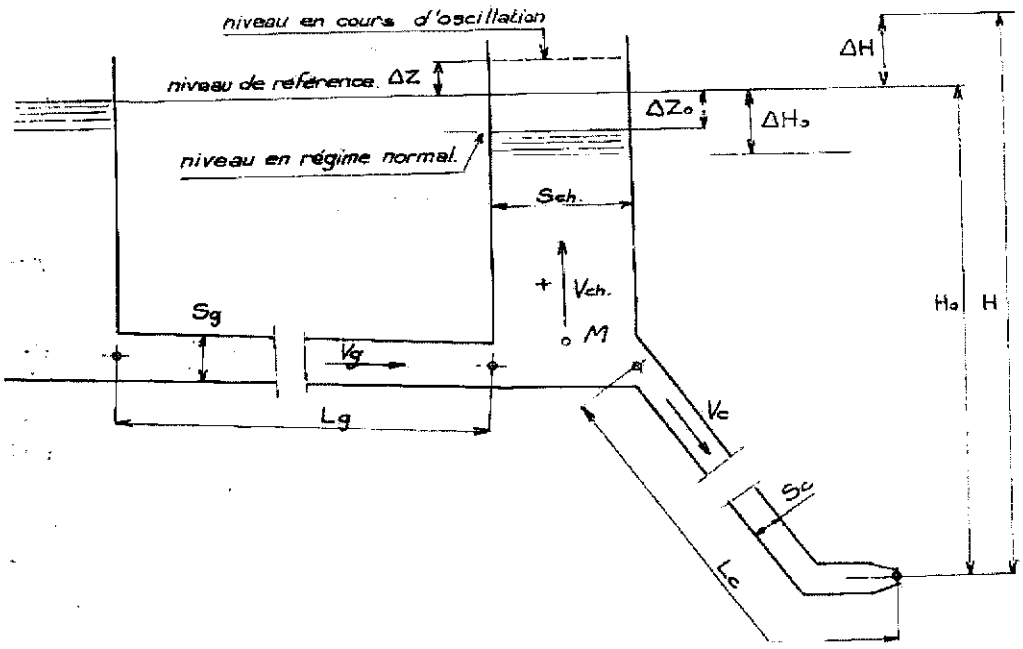


Fig. 2.15. — Mécanisme de fonctionnement de la cheminée d'équilibre.

2.3.2) *Oscillations consécutives à une fermeture brusque.*

Au temps $t = \theta$ le débit $Q$ s'annule brusquement, l'équation 15 s'écrit :

$$V_g . S_g = S_{ch} . \frac{d\Delta Z}{dt}$$

et l'équation 14 dans laquelle par mesure de simplification nous négligeons les pertes de charge devient :

$$\frac{L_g}{g} \cdot \frac{S_{ch}}{S_g} \cdot \frac{d^2 \Delta Z}{dt^2} + \Delta Z = 0$$

qui caractérise une oscillation entretenue de période :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_g}{g} \frac{S_{ch}}{S_g}}$$

d'amplitude maximale :

$$\Delta Z_{max} = \sqrt{\frac{L_g}{g} \frac{S_g}{S_{ch}}} \times V_{0g}$$

$V_{0g}$ vitesse d'écoulement dans la galerie avant perturbation.

La période d'oscillation est généralement longue, par exemple pour $S_{ch}/S_g = 10$, $L_g = 10\,000$ m : $T = 628$ s.

L'étude pratique des oscillations dans les cheminées d'équilibre n'est pas aussi simple que ce que nous venons d'indiquer, les pertes de charge, la loi de manœuvre, l'existence de dispositions plus ou moins complexes dans les chambres d'équilibre (étranglement, chambre d'expansion, déversoir), etc., compliquent sérieusement le problème, aussi de nombreuses méthodes ont été mises au point, signalons en particulier la méthode graphique de MM. Bouvart et Molbert dont la référence est indiquée en bibliographie.

2.3.3) *Cas des petits mouvements de vannage.*

On suppose l'écoulement perturbé par un petit mouvement de vannage au voisinage de l'ouverture correspondant au régime normal (indice 0).

L'équation de l'écoulement dans la galerie est, comme nous l'avons vu :

$$\frac{L_g}{g} \frac{dV_g}{dt} + \Delta Z + k'_g V_g^2 = 0 . \qquad 14)$$

L'écoulement dans la conduite est régi par une équation analogue :

$$\frac{L_c}{g} \frac{dV_c}{dt} + \Delta H - \Delta Z + k'_c V_c^2 = 0 . \qquad 16)$$

En régime d'équilibre ces deux équations s'écrivent :

$$\Delta Z_0 + k'_g V_{g0}^2 = 0 \qquad 14')$$

$$\Delta H_0 - \Delta Z_0 + k'_c V_{c0}^2 = 0 . \qquad 16')$$

Effectuons la différence, il vient :

$$\frac{L_g.V_{g0}}{gH_0}\,\frac{\mathrm{d}\,\dfrac{V_g}{V_{g0}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\Delta Z - \Delta Z_0}{H_0} + k_g'\,\frac{V_g^2 - V_{g0}^2}{H_0} = 0$$

$$\frac{L_c.V_{c0}}{gH_0}\,\frac{\mathrm{d}\,\dfrac{V_c}{V_{c0}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\Delta H - \Delta H_0}{H_0} - \frac{\Delta Z - \Delta Z_0}{H_0} + k_c'\,\frac{V_c^2 - V_{c0}^2}{H_0} = 0\,.$$

Posons : $\dfrac{L_g\,V_{g0}}{gH_0} = \Theta_g$ temps caractéristique de la galerie,

$\dfrac{L_c.V_{c0}}{gH_0} = \Theta_c$ temps caractéristique de la conduite.

$$\frac{\Delta Z - \Delta Z_0}{H_0} = \Delta z \qquad \frac{\Delta H - \Delta H_0}{H_0} = \Delta h \qquad \Delta v_g = \frac{V_g}{V_{g0}} - 1 \qquad \Delta v_c = \frac{V_c}{V_{c0}} - 1$$

$$V_g^2 = V_{g0}^2(1 + \Delta v_g)^2 \simeq V_{g0}^2(1+2\Delta v_g) \qquad V_c^2 = V_{c0}^2(1 + 2\Delta v_c)$$

(petits mouvements)

$$\frac{k_g'\,V_{g0}^2}{H_0} = K_g \qquad \frac{k_c'\,V_{c0}^2}{H_0} = K_c$$

il vient :

$$\Theta_g\,\frac{\mathrm{d}\Delta v_g}{\mathrm{d}t} + \Delta z + 2K_g.\Delta v_g = 0 \qquad 17)$$

$$\Theta_c\,\frac{\mathrm{d}\Delta v_c}{\mathrm{d}t} + \Delta h - \Delta z + 2K_c.\Delta v_c = 0\,. \qquad 18)$$

L'équation des débits à l'entrée de la chambre d'équilibre s'écrit :

$$S_g.V_g - S_c.V_c = S_{ch}.V_{ch}$$

en comptant positivement les débits qui pénètrent dans la chambre.

En régime normal :

$$S_g.V_{g0} - S_c.V_{c0} = 0$$

par différence :

$$\frac{S_g}{S_{ch}}(V_g - V_{g0}) - \frac{S_c}{S_{ch}}(V_c - V_{c0}) = V_{ch} = \frac{\mathrm{d}\Delta Z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\Delta Z - \Delta Z_0)}{\mathrm{d}t}$$

ou :

$$\frac{S_g}{S_{ch}} \frac{V_{g0}}{H_0} \frac{(V_g - V_{g0})}{V_{g0}} - \frac{S_c}{S_{ch}} \frac{V_{c0}}{H_0} \frac{(V_c - V_{c0})}{V_{c0}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\Delta Z - \Delta Z_0}{H_0} \right)$$

en remarquant que :

$$\frac{S_g}{S_{ch}} \cdot \frac{V_{g0}}{H_0} = \frac{S_c}{S_{ch}} \frac{V_{c0}}{H_0} = R$$

$R$, inverse du temps caractéristique de la cheminée d'équilibre

il vient :

$$R(\Delta v_g - \Delta v_c) = \frac{\mathrm{d}\Delta z}{\mathrm{d}t} \qquad 19)$$

Les équations 17, 18 et 19 constituent les équations caractéristiques de l'installation que nous ferons intervenir dans l'étude de la stabilité du réglage au chapitre 4.

2.3.4) *Stabilité de la cheminée d'équilibre dans le cas des petites oscillations. Condition de Thoma.*

Supposons qu'une oscillation de niveau s'amorce dans la chambre d'équilibre à la suite, par exemple, d'un mouvement de vannage. Lorsque le niveau s'élève, la chute mise à la disposition de la turbine augmente et la puissance fournie par celle-ci tend à croître ; pour l'en empêcher le régulateur commande un mouvement de fermeture dont l'effet est d'accentuer la montée dans la chambre, de même une descente provoque une petite ouverture de vannage qui accentue cette descente. Si l'influence des pertes de charge est prédominante toute oscillation s'amortit progressivement et le fonctionnement est stable. Mais on conçoit que le mouvement, au lieu de s'amortir, puisse aller en s'amplifiant si certaines conditions propres à l'installation ne sont pas réalisées, ce sont ces conditions que nous allons rechercher maintenant, nous verrons qu'elles se traduisent simplement par l'existence d'une section minimale de cheminée, dite section de Thoma.

En restant dans le domaine des petits écarts et en supposant le rendement de la turbine constant, les puissances motrices varient dans le rapport :

$$\frac{W}{W_0} = \frac{X}{X_0} \left( \frac{H}{H_0} \right)^{3/2}$$

soit en valeurs relatives :

$$\Delta w = \Delta x + \tfrac{3}{2} \Delta h$$

Un réglage à puissance constante $\Delta w = 0$ entraîne $\Delta x = -\tfrac{3}{2} \Delta h$.

Les débits varient dans le rapport :

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{X}{X_0}\left(\frac{H}{H_0}\right)^{1/2}$$

soit en valeurs relatives :

$$\Delta q = \Delta x + \frac{\Delta h}{2}$$

Le fonctionnement à puissance constante se traduit par :

$$\Delta q = -\Delta h .$$

Les oscillations de niveau dans la cheminée étant très lentes, nous admettrons que les oscillations de vannage qui en résultent n'entraînent dans la conduite que des surpressions négligeables, en conséquence $\Delta h = \Delta z$. Comme $\Delta V_c = \Delta q$, l'équation 19 donne :

$$\Delta v_g = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Delta z}{\mathrm{d}t} - \Delta z .$$

Cette valeur portée dans l'équation 17 donne l'équation différentielle du mouvement d'oscillation dans la cheminée :

$$\Theta_g \frac{\mathrm{d}^2\Delta z}{\mathrm{d}t^2} + [2K_g - R\Theta_g]\frac{\mathrm{d}\Delta z}{\mathrm{d}t} + R(1 - 2K_g)\,\Delta z = 0 . \qquad 20)$$

Ce mouvement d'oscillation est amorti si tous les coefficients de l'équation 20 sont de même signe c'est-à-dire positifs puisque $\Theta_g$ l'est nécessairement. La condition $1 - 2K_g > 0$ étant pratiquement toujours réalisée il reste :

$$2K_g - R.\Theta_g > 0$$

qui, avec :

$$R.\Theta_g = \frac{L_g.V_{g0}^2}{g.H_0^2}\cdot\frac{S_g}{S_{ch}} \qquad \text{et} \qquad K_g = \frac{k'_g.V_{g0}^2}{H_0}$$

conduit à :

$$\frac{S_{ch}}{S_g} > \frac{L_g}{k'_g.V_{g0}^2}\cdot\frac{V_{g0}^2}{2gH_0}$$

ou :

$$\frac{S_{ch}}{S_g} > \frac{1}{j_g}\frac{V_{g0}^2}{2gH_0} . \qquad 21)$$

($j_g$ perte de charge dans la galerie par unité de longueur)
qui est la forme habituelle de la condition de Thoma qui fixe la section minimale à adopter pour que la cheminée d'équilibre ne soit pas à l'origine d'une instabilité de fonctionnement.