

MARTIN KAPUNE

**MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DE L'ÉCOULEMENT
DANS UNE TURBINE BANKI**

Mémoire
présenté à la
Faculté des Études Supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de maître ès sciences (M. Sc.)

Département de Génie Mécanique
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL

NOVEMBRE 2000

© Martin Kapune, 2000



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*

Our file *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-55766-9

Canada

RÉSUMÉ

Le travail présenté ici visait à calculer l'écoulement de l'eau dans une turbine de type Banki. La turbine Banki est une turbine radiale dont le rotor a une forme cylindrique, de type cage d'écureuil. L'eau s'y écoule sous la forme d'un jet issu d'une tuyère que viennent traverser les aubes du rotor.

Une méthode regroupant des techniques de calcul simples a été mise en œuvre pour faire le calcul en régime permanent des vitesses du fluide dans la tuyère et dans la roue. Elle était basée sur un modèle physique du milieu fluide dans lequel les effets de viscosité et l'entraînement d'air étaient négligés. L'écoulement bi-dimensionnel était considéré irrotationnel et incompressible, et permettait de définir un champ de potentiel de vitesse. Ce champ de potentiel était calculé par la méthode des éléments finis, appliquée à l'ensemble du volume du fluide. La circulation générée par la présence d'aubes était prise en compte et une méthode itérative permettait de calculer la géométrie du jet dans la roue.

Les résultats ont montré les limites de la capacité de ce modèle à traiter un écoulement aussi complexe. Seule une géométrie très simplifiée de la turbine, ne comprenant qu'une seule aube a permis une résolution complète du problème.

Le travail a toutefois atteint son objectif de réaliser un calcul de première approximation de l'écoulement dans l'ensemble de la turbine. Cette approche a permis de jeter un regard neuf sur cette turbine, et peut servir de base au choix des méthodes à utiliser pour réaliser des calculs plus précis qui tiendraient davantage compte des complexités du problème.

Claire Deschênes

Martin Kapune

Directrice

AVANT-PROPOS

Je tiens avant toute chose à remercier ma directrice de recherche, Claire Deschênes, pour sa confiance et pour ses patients conseils qui, tout au long de ce travail, m'ont permis de garder le cap et d'arriver à bon port.

Je voudrais également faire apparaître ici le nom de Lise, pour sa tendresse et sa joie de vivre, et ceux de Juan Carlos et Carla, pour leur amitié inébranlable. Je mentionnerai aussi mes parents, Otto et Claire, pour leur affection et leur support inconditionnel.

Je leur suis tous reconnaissant de leur patience et de leur générosité. Ils ont tous été, chacun à sa façon, une source d'inspiration.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé	i
Avant-propos	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	vi
Liste des symboles mathématiques	ix
1 INTRODUCTION	1
1.1 La turbine Banki	3
1.1.1 Historique	3
1.1.2 Description de la turbine	4
1.2 Objectif du travail	6
1.3 Principales difficultés envisagées	7
1.4 L'approche choisie	8
1.5 Plan du mémoire.....	9
2 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	10
2.1 La turbine Banki	10
2.1.1 Donat Banki	11
2.1.2 Les successeurs de Banki	13
2.1.3 L'Université de Tokushima.....	14
2.1.4 Autres contributions récentes.....	15
2.2 Écoulements de fluide idéal avec circulation	17
2.3 Écoulements à surfaces libres.....	18

3	MODÈLE MATHÉMATIQUE.....	20
3.1	Modèle général du milieu fluide.....	20
3.1.1	Nature de l'écoulement et hypothèses de calcul	20
3.1.2	Équations de l'écoulement.....	26
3.1.3	Conditions aux limites	31
3.2	Discontinuités de circulation	36
3.2.1	Origine du phénomène	36
3.2.2	Traitement	38
3.3	Surfaces libres.....	39
4	DISCRÉTISATION ET TRAITEMENT NUMÉRIQUE	43
4.1	Discrétisation du système d'équations différentielles.....	43
4.1.1	Discrétisation et équations matricielles.....	43
4.1.2	Éléments de vitesse imposée.....	49
4.1.3	Éléments de parois mobiles.....	51
4.1.4	Résolution numérique globale	53
4.2	Traitement des discontinuités de circulation	55
4.2.1	Modification de l'équation matricielle	55
4.2.2	Schémas de calcul	58
4.3	Traitement des surfaces libres.....	59
4.3.1	Stratégie de calcul	59
4.3.2	Calcul du déplacement	61
4.3.3	Contraintes liées à la déformation du maillage	62
4.3.4	Approximation de la vitesse en début de surface libre.....	62
4.3.5	Condition à la sortie du jet	63
4.3.6	Lissage de la surface libre	63
5	TRAITEMENT INFORMATIQUE	64
5.1	Données.....	64
5.1.1	Données géométriques	64

5.1.2	Données du calcul par éléments finis.....	65
5.1.3	Résultats du calcul par éléments finis.....	66
5.1.4	Résultats du calcul de la position de la surface libre.....	66
5.2	Traitements effectués.....	67
5.2.1	Vue générale.....	67
5.2.2	Génération du modèle géométrique.....	71
5.2.3	Extraction automatique des données.....	73
5.2.4	Construction et résolution du système d'équations.....	77
5.2.5	Calcul de la position de la surface libre.....	80
6	CALCULS ET RÉSULTATS.....	83
6.1	Cylindre en mouvement: validation de l'élément de paroi mobile.....	83
6.1.1	Calculs effectués.....	83
6.1.2	Résultats.....	86
6.2	Profilé Kutta-Joukowski: validation du calcul de la circulation.....	90
6.2.1	Calculs effectués.....	90
6.2.2	Résultats.....	95
6.3	Jet à travers un orifice: validation du calcul de surface libre.....	103
6.3.1	Calculs effectués.....	103
6.3.2	Résultats.....	106
6.4	Calcul d'une turbine simplifiée.....	111
6.4.1	Calculs effectués.....	111
6.4.2	Résultats.....	120
7	CONCLUSION.....	142
8	BIBLIOGRAPHIE.....	146

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 :	Vue éclatée d'une turbine Banki (Ossberger)	4
Figure 1.2 :	Écoulement dans la turbine Banki (Ossberger).....	5
Figure 1.3 :	Caractéristiques de l'écoulement	7
Figure 2.1 :	Vitesses dans la roue	12
Figure 3.1 :	Modèle de l'écoulement et conditions limites	31
Figure 3.2 :	Vitesses à la paroi d'une aube	33
Figure 3.3 :	Discontinuité de circulation	36
Figure 4.1 :	Élément triangulaire à 6 nœuds.....	48
Figure 4.2 :	Élément rectangulaire à 8 nœuds	49
Figure 4.3 :	Élément de surface à 3 nœuds.....	50
Figure 4.4 :	Tangente à la paroi.....	51
Figure 4.5 :	Élément ressort.....	56
Figure 5.1 :	Algorithme général	68
Figure 5.2 :	Algorithme du calcul du potentiel de vitesse	79
Figure 5.3 :	Algorithme du calcul de la position des surfaces libres.....	81
Figure 6.1 :	Modèle géométrique du cylindre dans une conduite	85
Figure 6.2 :	Fluide en mouvement, vitesses absolues	87
Figure 6.3 :	Cylindre en mouvement, vitesses absolues.....	88
Figure 6.4 :	Cylindre en mouvement, vitesses relatives	89
Figure 6.5 :	Cercle transformé.....	92
Figure 6.6 :	Profilé Joukowski.....	92
Figure 6.7 :	Vitesse sur le contour du profilé Joukowski	94
Figure 6.8 :	Coefficient de pression sur le contour du profilé Joukowski.....	94

Figure 6.9 :	Modèle géométrique de l'écoulement autour d'un profilé Joukowski...	97
Figure 6.10 :	Maillage du domaine.....	98
Figure 6.11 :	Maillage autour du profilé Joukowski	99
Figure 6.12 :	Champ de vitesse (profilé Joukowski)	100
Figure 6.13 :	Champ de vitesse autour du profilé.....	101
Figure 6.14 :	Coefficient de pression autour du profilé.....	102
Figure 6.15 :	Modèle géométrique (orifice)	105
Figure 6.16 :	Maillage (orifice)	105
Figure 6.17 :	Champ de vitesse (orifice)	106
Figure 6.18 :	Déplacements de la surface libre.....	109
Figure 6.19 :	Vitesse sur la surface libre	109
Figure 6.20 :	Modèle de la turbine	116
Figure 6.21 :	Détail de la géométrie de l'aube	117
Figure 6.22 :	Modèle géométrique du calcul.....	118
Figure 6.23 :	Division du domaine de calcul en surfaces	119
Figure 6.24 :	Maillage initial (turbine simplifiée)	123
Figure 6.25 :	Maillage initial (turbine simplifiée)	124
Figure 6.26 :	Maillage, première itération (turbine simplifiée).....	125
Figure 6.27 :	Maillage, première itération (turbine simplifiée).....	126
Figure 6.28 :	Maillage, deuxième itération (turbine simplifiée).....	127
Figure 6.29 :	Maillage, deuxième itération (turbine simplifiée).....	128
Figure 6.30 :	Champ de vitesses, initial (turbine simplifiée)	129
Figure 6.31 :	Champ de vitesses, initial (turbine simplifiée)	130
Figure 6.32 :	Champ de vitesses, initial (turbine simplifiée)	131
Figure 6.33 :	Champ de vitesses, première itération (turbine simplifiée)	132
Figure 6.34 :	Champ de vitesses, première itération (turbine simplifiée)	133
Figure 6.35 :	Champ de vitesses, première itération (turbine simplifiée)	134
Figure 6.36 :	Champ de vitesses, deuxième itération (turbine simplifiée).....	135
Figure 6.37 :	Champ de vitesses, deuxième itération (turbine simplifiée).....	136
Figure 6.38 :	Champ de vitesses, deuxième itération (turbine simplifiée).....	137
Figure 6.39 :	Géométrie finale du jet.....	138

Figure 6.40 : Déplacements des surfaces libres.....	139
Figure 6.41 : Vitesse sur les surfaces libres.....	140
Figure 6.42 : Vitesses autour de l'aube	141
Figure 6.43: Coefficients de pression autour de l'aube	141

LISTE DES SYMBOLES MATHÉMATIQUES

Modèles mathématiques

P	puissance hydraulique développée
Q	débit
p	pression
u	vitesse périphérique du rotor
c	vitesse absolue du fluide
w	vitesse relative du fluide par rapport à la roue
α	angle entre la vitesse absolue et la vitesse périphérique de la roue
β	inclinaison des aubes
ω	vitesse de rotation de la roue
γ	poids spécifique du fluide
ρ	densité du fluide
g	accélération gravitationnelle
η	rendement
r, r	distance radiale
x, y	coordonnées cartésiennes
v, v	vitesse du fluide
ϕ	potentiel de vitesse
H	hauteur de charge
H_w, h_w	travail sur le fluide
z	hauteur
W	puissance
n	vecteur normal
t	vecteur tangent
Γ	circulation
d	déplacement
L	longueur de référence

Discrétisation

N_i	fonctions d'interpolation élémentaires
ϕ^*	fonctions de pondération
K_{ij}	matrice de rigidité globale
k_{ij}	matrice de rigidité élémentaire
F_{ij}	matrice-force globale
f_{ij}	matrice-force élémentaire
ξ, ξ, η	coordonnées élémentaires
J	matrice jacobienne
L, S	matrices de triangularisation
k	constante de rigidité de l'élément ressort
ε	critère de convergence

Calculs

z, ζ	variables complexe (domaine initial domaine transformé)
a, b, e, β	paramètres de la transformation de Kutta-Joukowski
C_p	coefficient de pression
C_c	coefficient de contraction

1 INTRODUCTION

Les techniques permettant d'exploiter les ressources hydro-énergétiques ont bénéficié de progrès important durant le XXe siècle, dans le cadre de projets de construction de centrales hydroélectriques de très grande envergure. Par leur taille, leur précision et leur efficacité, les équipements de ces centrales, et notamment les turbines hydrauliques, arrivent au premier plan des réalisations du génie moderne. Ces grands projets ont fait usage de trois types de turbines hydrauliques : les turbines Pelton, utilisées dans les installation de haute chute, les turbines Francis dans les centrales de moyenne chute, et les turbines Kaplan, utilisées dans les conditions de basse chute.

En marge de cet axe principal du développement des techniques des turbines hydrauliques autour de grands projets, l'exploitation de centrales de petite puissance a donné lieu au développement d'une pratique qui possède certaines spécificités. L'une d'elle est l'utilisation de modèles de turbines différents de celles utilisées dans les grands projets.

Par exemple, les contraintes de coûts et les exigences moins élevées de rendement énergétique rendent généralement inappropriée l'utilisation d'une turbine Kaplan dans une petite centrale. qu'on remplace par une turbine à hélices à aubes fixes, moins efficace. Ces mêmes exigences ont fait qu'un choix très répandu de turbine dans les petites centrales est la turbine dite de type Banki-Michell, ou turbine à flux traversant. C'est cette machine qui fait l'objet du présent travail de maîtrise.

Les turbines hydrauliques sont traditionnellement classifiées en deux groupes : les turbines à impulsion (Pelton, Turgo) et les turbines à réaction (Francis, Kaplan, hélice). La turbine Banki a ceci de particulier qu'elle est souvent considérée comme un cas limite entre les deux. Elle partage avec les turbines à impulsion le fait que l'écoulement dans la roue se fait sous la forme d'un jet libre; et elle partage avec la turbine à réaction le fait que, en raison de l'épaisseur du jet, une partie de l'aubage est opérée sous pression.

La turbine Banki est une turbine hydraulique à écoulement radial, dont le rotor de forme cylindrique permet une double traversée de l'eau dans l'aubage. Depuis son invention au début du siècle, elle est utilisée exclusivement dans les installations de petite puissance, c'est-à-dire de moins d'un mégawatt. Vraisemblablement en raison de cet usage exclusif, en même temps qu'en raison du rendement plus faible qu'elle atteint, elle a reçu relativement peu d'attention des chercheurs depuis son apparition.

Nous avons tenté ici d'appliquer à cette turbine des méthodes récentes de calcul numérique des écoulements. On a cherché ainsi à faire avancer les connaissances autrement peu développées sur la nature des phénomènes fluides qui surviennent à l'intérieur de cette turbine.

Les chercheurs ont généralement considéré deux zones distinctes de l'écoulement dans la turbine pour pouvoir simplifier les modèles d'analyse : l'écoulement dans la tuyère et l'écoulement dans la roue. La tuyère est une conduite de section rectangulaire, à l'intérieur de laquelle se trouve, dans la plupart des modèles de turbine Banki, une vanne de régulation du débit (de type vanne-papillon). L'écoulement dans cette partie est sous pression et, bien qu'on puisse poser des hypothèses raisonnablement fiables sur les conditions à l'entrée, les conditions à la sortie de la tuyère sont inconnues en pratique. L'écoulement dans la roue est celui d'un jet qui est traversé par un certain nombre d'aubes en mouvement. Le calcul de l'écoulement dans cette partie demande de poser des hypothèses sur les conditions à la sortie de la tuyère.

Nous avons tenté ici de traiter dans un même calcul ces deux parties de l'écoulement et d'englober ainsi l'ensemble de l'écoulement dans la turbine. Contrairement aux turbines Francis, par exemple, le calcul dans la roue de la turbine Banki ne bénéficie pas de la possibilité d'utiliser un référentiel tournant puisqu'il n'y a pas de symétrie radiale. Dans le calcul tenté ici, le modèle mathématique de l'écoulement, comme le système de référence des coordonnées, étant les mêmes dans les différentes composantes de la turbine, il ne semblait pas y avoir d'avantage majeur à séparer l'écoulement.

Pour réaliser ce calcul, il a fallu décider d'un modèle physique de l'écoulement, définir un volume de fluide sur lequel ce modèle a été appliqué, et poser les hypothèses permettant d'établir les conditions qui prévalent à l'intérieur de même que sur les limites de ce volume de fluide. On a

ainsi obtenu alors un système d'équations aux dérivées partielles dont la solution donne les conditions de l'écoulement en chaque point à l'intérieur du volume de calcul.

Une approche numérique a été mise sur pied, à partir de méthodes éprouvées, pour résoudre ce système d'équations et en traiter les conditions aux limites. Cette approche avait pour objectif d'appliquer la méthode des éléments finis à l'ensemble de l'écoulement dans la turbine.

1.1 LA TURBINE BANKI

1.1.1 HISTORIQUE

La turbine Banki est apparue au début du siècle, en Europe, en même temps que les turbines modernes, comme la turbine Kaplan. Le premier brevet relatif à la turbine Banki date de 1905, il est dû à A. G. M. Michell, un australien.

La turbine a, peu après, reçu une certaine attention, surtout en Europe centrale, sous l'effet des travaux de Donat Banki, en l'honneur duquel on nomme souvent la machine. Celui-ci a élaboré une première théorie scientifique pour la conception de la turbine, dans une série d'articles publiés entre 1912 et 1918 [1], qui sert encore aujourd'hui dans la recherche et la pratique.

Jusqu'à récemment, l'exploitation de la turbine s'est confinée à l'Europe centrale, notamment en Hongrie (Ganz Turbinen), en Russie et en Allemagne. De ce dernier pays, la compagnie Ossberger-Turbinenfabrik, détentrice de plusieurs brevets, a été une des seules entreprises à fabriquer ce type de turbine durant les dernières décennies. Les développements théoriques liés à la turbine se sont fait principalement en industrie et ont connu une faible diffusion.

Le désintéressement vis-à-vis de la turbine Banki, dont ont fait preuve les ingénieurs de la plupart des pays du monde, semble être venu de ce que la machine a été exclusivement dédiée aux installations de petite puissance, alors que les travaux des théoriciens se concentraient sur les trois turbines (Pelton, Francis, Kaplan) qui servaient aux ouvrages de plus grande échelle. C'est au début des années '80, sous l'impact des chocs pétroliers et de l'expansion de la recherche de sources alternatives d'énergie, que l'intérêt pour l'hydroélectricité de petite puissance, et, par

conséquent, pour la turbine Banki, est réapparu. Depuis lors, plusieurs travaux expérimentaux et théoriques, qui comptent maintenant comme l'essentiel de la théorie de la machine, ont été menés, notamment au Japon, en Europe et aux États-Unis.

La vocation de la turbine a été souvent orientée vers une solution aux problèmes énergétiques des pays en voie de développement. Ceci est dû au fait qu'elle est simple et peu coûteuse à construire, notamment parce que l'aubage est de forme cylindrique et donc facile à usiner. Contrairement aux roues de turbines Francis ou Kaplan, la fabrication d'une turbine Banki nécessite seulement des opérations simples d'usinage et de soudage. La turbine est ainsi bien adaptée à des projets de petite échelle aux ressources financières et techniques limitées.

1.1.2 DESCRIPTION DE LA TURBINE

Un schéma montrant les principales pièces d'une turbine Banki est montré à la figure 1.1. Il s'agit d'un modèle Ossberger.

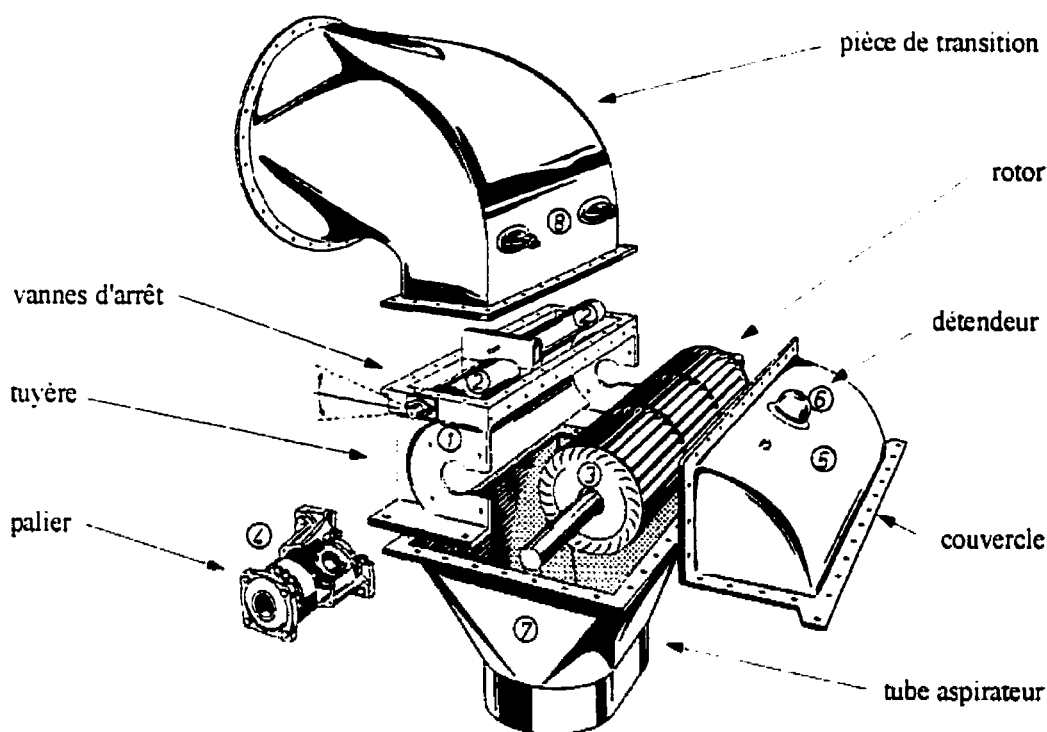


Figure 1.1 : Vue éclatée d'une turbine Banki (Ossberger)

Le rotor (3) est de forme cylindrique. Une série d'aubes maintenues par des plaques circulaires aux extrémités forme une cage cylindrique. Ces plaques sont fixées soit à des paliers (4), soit à un arbre qui traverse alors au centre du rotor. Pour les rotors de grande dimension axiale, des plaques additionnelles sont ajoutées dans des sections intermédiaires du rotor pour solidifier l'assemblage.

La tuyère (1) amène un jet d'eau rectangulaire au rotor. Elle ne couvre qu'une partie seulement de la circonférence du rotor, en général de 60° à 120° , selon les conditions d'opération. Une pièce de transition (8) est nécessaire pour raccorder la tuyère, de section rectangulaire, à la conduite d'amenée circulaire.

Une vanne d'arrêt (2) est d'ordinaire présente dans la tuyère, dans la partie rectangulaire de celle-ci, à peu de distance de la roue. Plusieurs modèles ont été proposés, bien que le type vanne-papillon soit le plus fréquent.

L'utilisation d'un aspirateur (7), est apparue à la fin des années '50. Utilisé avec un couvercle (5), il permet d'augmenter la charge disponible, en abaissant la pression à la sortie de la tuyère. Sa présence nécessite en général l'ajout d'un détendeur d'air (6), qui sert à contrôler la hauteur d'eau dans l'aspirateur.

La figure 1.2 montre l'écoulement dans la turbine, toujours avec un modèle Ossberger.

Après le passage dans la pièce de transition qui donne à l'écoulement une section rectangulaire, l'eau traverse la vanne de régulation du débit. La tuyère amène ensuite une entrée optimale de l'eau dans la roue. L'écoulement dans la roue prend la forme de deux passages à travers les aubes. Pour ce faire, l'écoulement traverse la roue dans son centre, dans sa direction radiale. L'eau s'écoule ensuite vers l'aspirateur.

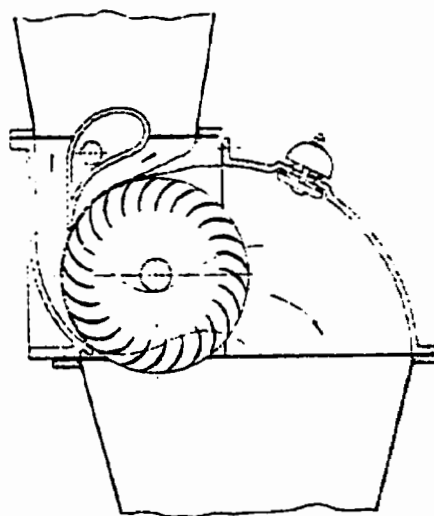


Figure 1.2 : Écoulement dans la turbine Banki (Ossberger)

1.2 OBJECTIF DU TRAVAIL

Jusqu'à maintenant, l'étude de la turbine s'est restreinte à l'application de l'équation de la quantité de mouvement et de l'équation de Bernoulli, sous une série d'hypothèses liées à des conditions optimales d'écoulement. On parvenait ainsi à tirer des conclusions sur les caractéristiques globales de l'écoulement et définir des critères de conception.

La modélisation numérique, ou plus précisément la résolution numérique des équations aux dérivées partielles décrivant le milieu fluide à l'intérieur de la machine, est une approche nouvelle dans l'étude de la turbine Banki, comme dans de nombreuses applications encore. Son avantage est qu'elle peut donner la valeur des quantités physiques décrivant l'écoulement en chaque point du milieu fluide, et non seulement fournir des résultats globaux. La difficulté qu'elle présente est qu'elle exige de grandes ressources informatiques et que sa mise en œuvre peut être ardue lorsque l'écoulement est complexe. Or, l'écoulement dans la turbine Banki est justement assez complexe, comme nous le verrons. Par ailleurs, la turbine Banki étant une machine destinée prioritairement à des projets de petite échelle, les outils de conception qui sont utilisés à son égard doivent rester peu coûteux.

L'objectif de ce travail consiste donc à établir une méthode de résolution des équations du milieu qui puisse donner des résultats probants quant au détail de l'écoulement dans la turbine Banki, et cela avec un minimum d'effort. Il s'agit en fait de faire un choix parmi des méthodes qui sont connues et dont la mise en œuvre est rapide, de manière à ce qu'elles puissent donner un premier résultat.

Le présent travail ne vise pas à obtenir une méthode entièrement fonctionnelle, et encore moins une méthode optimale. Il vise seulement à tenter une première approche de la turbine, pour identifier les difficultés qu'elle présente et établir la meilleure approche à suivre dans un travail de conception appuyé sur la modélisation numérique. Il est aussi moins axé sur le développement des méthodes numériques que sur leur application. On ne cherche pas à étudier de nouvelles méthodes, on cherche plutôt à appliquer des méthodes numériques éprouvées de première approximation et de les appliquer à une machine à l'égard de laquelle elles ont été peu exploitées.

1.3 PRINCIPALES DIFFICULTÉS ENVISAGÉES

L'écoulement dans la turbine Banki présente de nombreuses difficultés dans le développement d'un modèle mathématique qui puisse le décrire adéquatement. Il est schématisé à la figure 1.3.

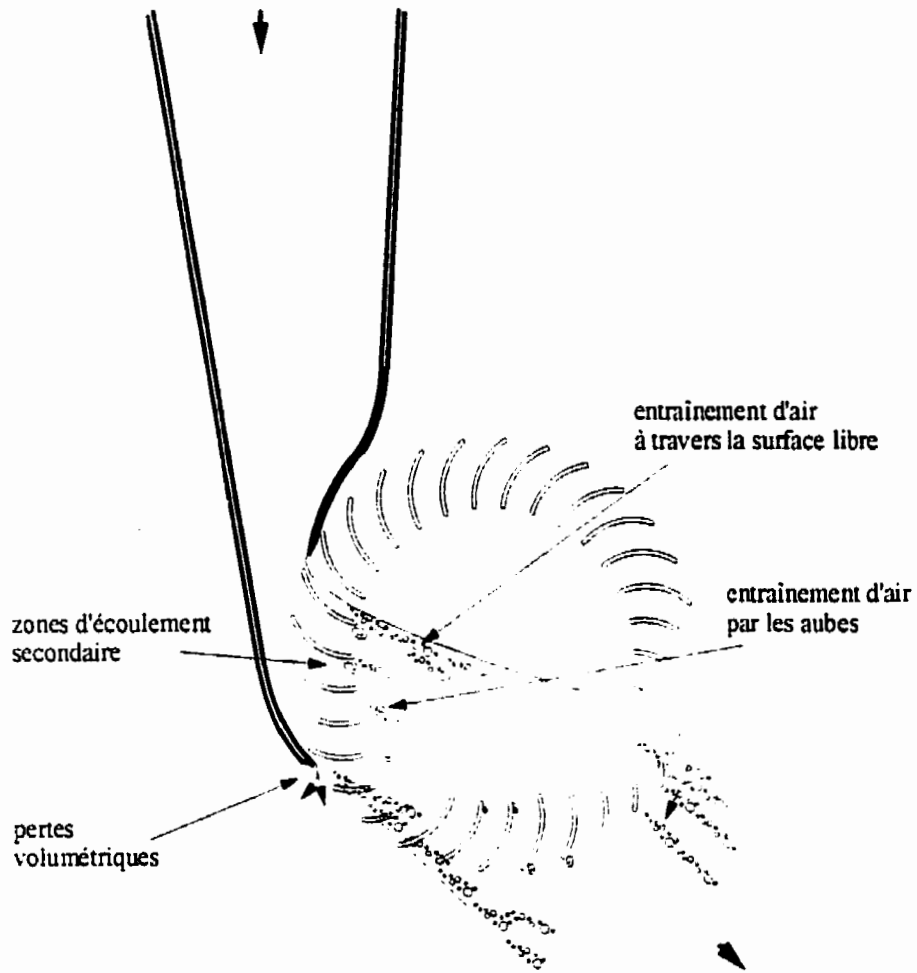


Figure 1.3 : Caractéristiques de l'écoulement

Il y a d'abord des zones, près des aubes situées dans le jet près desquelles se forme une couche limite et où la viscosité est un facteur important. Des zones d'écoulement secondaire

peuvent même apparaître. Il y a ensuite un important entraînement d'air dans la machine, d'une part, parce que l'air entre à travers la surface libre du jet turbulent qui traverse la roue, et d'autre part, parce qu'en pénétrant dans le jet, les aubes y entraînent de l'air par adhérence, et que celui-ci est ensuite libéré à l'intérieur du jet.

Par ailleurs, la géométrie de l'écoulement est complexe. Des aubes en mouvement traversent la région occupée par le fluide. Pour réduire cette complexité, seule une symétrie plane peut être invoquée. Elle ne permet toutefois pas de réduire l'aubage à une portion réduite qui puisse être étudiée avec une certaine utilité, comme on peut étudier une portion radiale de la roue d'autres types de turbine, comme la Francis ou la Kaplan. L'aubage doit être étudié dans son ensemble si on ne veut pas être obligé de poser des hypothèses trop grossières sur les conditions aux frontières du domaine de calcul.

Enfin, l'écoulement dans la turbine Banki est essentiellement un jet complexe. Issu d'une embouchure convergente, il est coupé par le passage des aubes qu'il entraîne. La difficulté que cela introduit dans le calcul de l'écoulement est, d'une part, que l'écoulement est instationnaire ou au plus cyclique, et, d'autre part, que la région occupée par le fluide n'est pas connue a priori.

1.4 L'APPROCHE CHOISIE

La méthode qu'on a cherchée à mettre sur pied ici a visé d'abord à pouvoir résoudre ces dernières difficultés: la géométrie complexe et la position inconnue des limites du jet. Les autres aspects de l'écoulement: les phénomènes visqueux et l'entraînement d'air ont été laissés à une étape subséquente de la recherche. Le modèle retenu est le plus simple qui ait pu offrir une solution sur l'ensemble du volume de fluide dans la turbine.

L'absence de viscosité et d'air dans le modèle du milieu fluide permet de le décrire par un champ de potentiel de vitesse, du fait que des conditions d'incompressibilité et d'irrotationalité y règnent. Ce modèle sera décrit plus en détail à la section 3. Pour obtenir une résolution de champ de potentiel de vitesse, une approche numérique de calcul selon la méthode des éléments finis a été utilisée. Cette approche facilite le traitement de la géométrie complexe du problème.

La présence d'aubes dans l'écoulement génère de la circulation qui nécessite, pour que soit respectée la condition d'irrotationalité, l'exclusion de zones de tourbillons issus des aubes et l'ajout d'une procédure de calcul pour déterminer la valeur de la circulation. De plus, le modèle d'écoulement en potentiel de vitesse ne permet pas de déterminer la position de la surface libre du jet. Il requiert en fait que la surface libre soit traitée comme une paroi imperméable. Une procédure additionnelle est ainsi nécessaire pour déterminer cette position.

Ce travail consistera donc à mettre au point cette méthode. Les travaux de Sarpkaya et Hiriart [47, 48, 49] et de Chan et Larock [50] en sont la base. Elle consiste en un calcul itératif qui met en application l'équation de Bernoulli.

1.5 PLAN DU MÉMOIRE

Ce mémoire se divise en 5 parties.

1. La revue de la littérature touchera trois sujets :
 - l'étude de la turbine Banki elle-même
 - la modélisation d'écoulements en potentiel de vitesse avec circulation
 - le calcul d'écoulements à surfaces libres
2. Le chapitre suivant expose le modèle mathématique du milieu fluide. Les équations du milieu sont données, de même que les conditions qui seront imposées aux limites du domaine de calcul pour les résoudre.
3. L'approximation numérique de ce système d'équations sera donnée au chapitre 4, de même que la procédure de résolution.
4. Le chapitre suivant décrit le traitement informatique avec lequel le calcul est mis en œuvre. Il détaille les données graphiques et numériques et les traitements qui en sont faits.
5. Finalement, les calculs qui ont été faits pour valider chacune des parties du code de calcul utilisé et pour en évaluer la performance globale sont présentés.

2 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Les sources bibliographiques de ce travail seront résumées ici en deux temps. Nous allons d'abord faire un survol du développement théorique et expérimental de la turbine Banki, de manière à situer le présent travail dans le cadre des connaissances existantes sur la machine. Ensuite, nous allons évoquer brièvement les sources d'où ont été tirées les techniques qui ont été utilisées ici pour modéliser l'écoulement. Il s'agit des techniques de modélisation des jets de fluide idéal par éléments finis et les méthodes de calcul des écoulement avec potentiel de vitesse avec circulation.

2.1 LA TURBINE BANKI

Très peu de travaux ont été publiés sur la turbine Banki, depuis son apparition au début du siècle. Ceci s'explique par, d'une part, l'intérêt moindre qu'ont montré les ingénieurs pour cette machine en comparaison des turbines Kaplan, Francis et Pelton, et, d'autre part, du fait que les innovations ont surtout eu lieu en industrie et que les manufacturiers n'ont à peu près rien publié de leurs travaux. On peut toutefois noter deux grandes périodes d'activité dans la recherche.

D'abord, la première moitié du siècle, en Europe Centrale, a vu des travaux surtout théoriques, où l'analyse se basait sur des modèles unidimensionnels de l'écoulement. Cette théorie a été développée principalement par Banki, pour être peaufinée ensuite par ses successeurs. L'activité de recherche se faisait surtout dans le milieu industriel, qui était une source de résultats empiriques.

Un renouveau d'intérêt pour la turbine est apparu au début des années 80, dans les milieux universitaires, sous l'impulsion du choc pétrolier, dans la foulée de la recherche sur les énergies alternatives. On cherchait alors, d'un côté, à utiliser les sources d'énergie inexploitées qu'étaient les sources hydriques de petite puissance, et, de l'autre côté, à remplacer des sources polluantes par d'autres qui auraient des effets moindres sur l'environnement. Ceci a permis une modernisation de la théorie, telle qu'elle avait été développée par Banki et ses successeurs, et de l'adapter à des

nouvelles tendances de conception. Ce travail théorique a été accompagné d'une révision des essais de performance en laboratoire. Enfin, l'arrivée de méthodes numériques de calcul a permis une nouvelle approche de l'étude de l'écoulement.

Ce sont ces méthodes qui semblent offrir le plus de promesses quant à l'étude théorique de l'écoulement dans la turbine. Elles représentent cependant un défi majeur en raison de la complexité de l'écoulement dans la turbine, qui n'a été que partiellement mis à jour par le travail expérimental. Jusqu'à maintenant, aucun des travaux théoriques qui ont été faits ne s'est aventuré au-delà d'une approximation grossière du comportement du fluide dans la turbine.

Comme il a été dit, la théorie de la turbine Banki s'est restreinte jusqu'à maintenant à des modèles dynamiques unidimensionnels basés sur des applications de l'équation de la quantité de mouvement et de l'équation de Bernoulli. Ce sont là des approches foncièrement différentes de celle utilisée ici. Nous allons toutefois faire un bref survol des travaux précédents pour situer le présent travail dans le développement de la machine et établir les directions qu'elle devrait prendre.

2.1.1 DONAT BANKI

La première élaboration d'une théorie de la turbine est due à Donat Banki. Cet ingénieur hongrois y a consacré les dernières années de sa vie, et l'a publiée dans une série d'articles parus entre 1912 et 1918 [1].

Le principe de base de cette théorie est l'application de l'équation des turbines d'Euler en considérant les deux passages à travers l'aubage comme la contribution cumulative de deux turbines différentes. Cette équation s'écrit :

$$P = \frac{Q\gamma}{g} [u_1 c_1 \cos \alpha_1 - u_2 c_2 \cos \alpha_2 + u_3 c_3 \cos \alpha_3 - u_4 c_4 \cos \alpha_4] \quad (2.1)$$

où : P étant la puissance hydraulique développée,
 Q le débit,
 γ le poids spécifique

g la constante gravitationnelle
 u la vitesse périphérique du rotor.
 c la vitesse absolue du fluide et
 α l'angle entre ces deux vecteurs vitesses.

Les indices indiquent les différentes étapes de l'écoulement dans la roue, soit, respectivement, l'entrée et la sortie du premier passage (1 et 2) et l'entrée et la sortie du second passage dans le rotor (3 et 4) (voir figure 2.1).

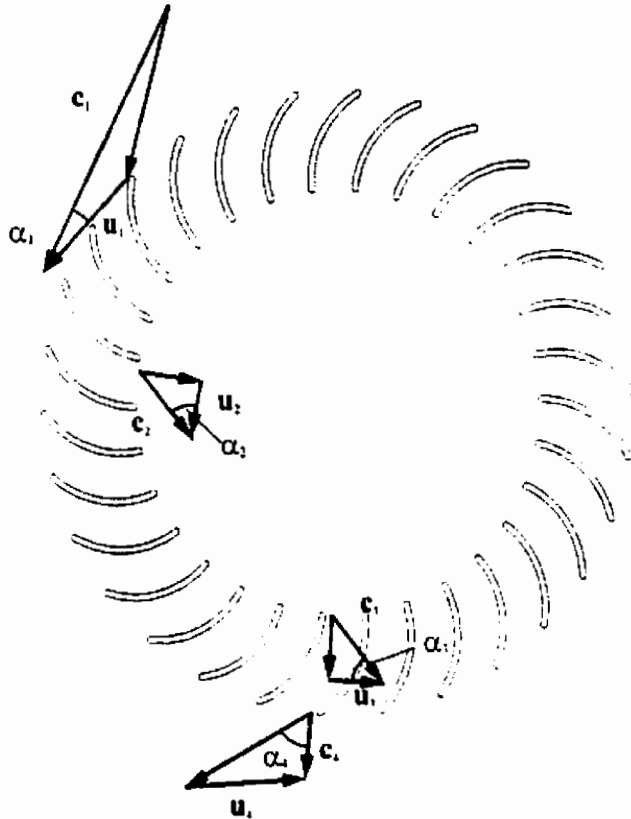


Figure 2.1 : Vitesses dans la roue

Il a ensuite fait plusieurs hypothèses sur la grandeur et la direction de la vitesse dans le rotor, qui amènent divers résultats sur la performance de la machine, dont le rendement théorique maximum, η_{\max} donné par :

$$\eta_{\max} = \cos^2 \alpha_1 \quad (2.2)$$

Banki donne aussi, à partir de ces résultats, diverses recommandations sur le dimensionnement. Elles serviront de base à une grande part des travaux qui suivront.

2.1.2 LES SUCCESEURS DE BANKI

Les théoriciens qui suivront tenteront d'exploiter cette base théorique et de préciser certains effets de l'écoulement ou de la géométrie qui influencent la performance de la machine. Ils tenteront aussi d'adapter le modèle théorique à la pratique effective de la fabrication de la machine. Ainsi, en 1923, Sonnek [2] a proposé une première révision complète de la théorie allant dans ce sens. En 1959, Varga [6] a analysé en détail la pression dans la turbine. Alors que Banki développait sa théorie en partant de l'hypothèse d'une turbine à impulsion, Varga a fait l'hypothèse d'une réaction non-nulle dans la turbine. Il a développé une expression de la chute de pression dans la roue en fonction de la vitesse de rotation :

$$\frac{\Delta p}{c_1^2} \frac{\gamma}{2g} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \sin^2 \alpha_1 + 2 \frac{u_1}{c_1} \cos \alpha_1 - \left(\frac{u_1}{c_1}\right)^2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - 1 \quad (2.3)$$

où: Δp est la différence de pression entre l'entrée et la sortie de la roue, et r_1 et r_2 sont les rayons externe et interne de la roue.

Il a ensuite montré que le rendement maximum correspond à une chute de pression nulle, c'est-à-dire, au cas limite où la turbine Banki agit comme une turbine à impulsion.

Dans leurs conceptions initiales, les turbines Banki avaient des tuyères qui généraient des jets minces. Cela permettait d'obtenir de meilleures conditions d'écoulement dans la roue. Pour augmenter le débit turbiné et la puissance des installations, et pour en venir à obtenir des machines aux dimensions plus compactes, la pratique a plutôt adopté rapidement des modèles à jet plus large. Halmos [7] a cherché à optimiser le dessin de ces turbines à large jet. Il a étudié les effets d'une valeur non uniforme des conditions à l'entrée de la roue sur l'écoulement. Sa recommandation était de réduire la largeur radiale de l'aubage.

En 1960, Haimerl [8] rendait compte de la pratique usuelle de la conception de la turbine et de l'avantage d'utiliser un aspirateur pour tirer parti des effets de la pression dans la roue et maximiser la hauteur de chute disponible.

2.1.3 L'UNIVERSITÉ DE TOKUSHIMA

Au début des années '80, plusieurs chercheurs, en Asie, en Europe et aux États Unis, ont entamé des travaux sur la turbine Banki. Leur objectif était à la fois la recherche de sources d'énergies alternatives aux combustibles fossiles, et la mise au point de technologies à faible coût pour le développement des pays du Tiers Monde.

Un groupe de recherche de l'Université de Tokushima au Japon a été particulièrement actif dans l'étude théorique et expérimentale de la turbine Banki.

En 1982 [11], ils publiaient les résultats d'une étude expérimentale visant à optimiser la conception de la turbine et à déterminer les caractéristiques générales de fonctionnement. Un aspect important qu'a montré l'observation est la présence de deux parties distinctes de l'écoulement dans la roue. À la sortie de la roue et environ au centre de la section d'écoulement, on note en effet une petite zone de faible débit qui marque cette division du jet en deux parties. La première de ces deux parties est constituée de l'écoulement traversant, qui passe entièrement au centre de la roue. La deuxième est l'écoulement tangent, qui ne traverse jamais entièrement l'aubage. Ils concluaient par ailleurs que le rendement maximum n'était pas obtenu d'une turbine à jet mince, mais était plutôt optimal pour un angle sous-tendu de 90° . Ce résultat sera confirmé par d'autres auteurs [11, 14, 15, 21, 22, 23, 24] par la suite.

En '85 [12], ils réalisaient un calcul de l'écoulement dans la tuyère en appliquant des transformations conformes de type Schwarz-Christoffel. Le calcul incluait les parois de la tuyère et les surfaces libres du jet; il excluait la présence de la roue. L'objectif ici était d'établir une conception de la tuyère qui permette d'obtenir des conditions d'écoulement optimales à l'entrée dans la roue.

Une nouvelle approche numérique était ensuite développée en '91 [13]. C'est un calcul en 2D qui considère l'écoulement dans la roue seulement. Il est basé sur un certain nombre d'hypothèses sur la géométrie de l'écoulement, et se fait à partir de conditions prédéfinies à la sortie de la tuyère.

Le calcul se fait en appliquant l'équation de la quantité de mouvement le long d'une ligne de courant pour un écoulement instationnaire :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + r\omega^2 \frac{\partial r}{\partial x} \quad (2.4)$$

où: w est la vitesse relative à la roue,
 p la pression,
 ρ la densité,
 r la distance radiale du centre de la roue,
 ω la vitesse de rotation de la roue,
 x la distance le long d'une ligne de courant et
 t le temps.

Cette équation est intégrée différemment dans chacune des différentes zones de la roue. Pour chacune des zones, les conditions limites et surtout les conditions initiales sont obtenues du résultat du calcul sur la zone située en amont. Les aubes sont réduites à des lignes infiniment minces et l'intégration se fait par la méthode de Runge-Kutta. Ce calcul se faisait à la lumière de deux sections distinctes du jet dans la roue, tel que mentionné précédemment. Ce phénomène était d'ailleurs adéquatement reproduit par le calcul.

2.1.4 AUTRES CONTRIBUTIONS RÉCENTES

Reprenant l'analyse de l'écoulement en considérant séparément l'écoulement traversant et l'écoulement tangent, et en tenant compte de déviations par rapport à l'écoulement idéal, Kim et Lee [18] ont montré qu'une plus grande proportion d'écoulement tangent réduit le rendement. Ils ont aussi trouvé que le coefficient de débit de la tuyère est affecté par la vitesse de rotation de la roue.

Entre 1984 à 1994, deux groupes de recherche de l'Université Clemson (Caroline du Sud) et de l'Université d'État du Colorado ont conduit une série de tests paramétriques exhaustifs sur un modèle simple de turbine [15, 21, 22, 23, 24]. Ils ont conclu à l'efficacité de jets larges (optimal à un angle sous-tendu par le jet sur le roue de 90°) et à des roues à grand nombre d'aube (30). Ces configurations optimiseraient le transfert d'énergie entre le fluide et les pièces tournantes. Des équations empiriques de dimensionnement ont été développées.

Van Berkel [17] réalisa en 1988 un calcul par éléments finis de l'écoulement dans la tuyère autour d'une vanne-papillon expérimentale. Sa conception cherchait à allier l'efficacité énergétique et la simplicité de construction. Il a réalisé le calcul d'un écoulement potentiel sur un domaine qui débute un peu en amont de la vanne, dans une conduite droite et se termine par le début de deux jets de chaque côté de la vanne. Celle-ci n'était donc pas entièrement submergée. La position des surfaces libres était approximée en considérant chaque côté de la vanne comme un entonnoir 2D. Les conditions de vitesse étaient déterminées à l'entrée dans la conduite et à la sortie, aux extrémités des jets, par continuité. L'équation de Laplace pour le potentiel de vitesse était résolue sur le domaine à l'aide d'une discrétisation éléments finis. Van Berkel proposait d'étendre ce modèle en considérant ensuite la collision des deux jets en aval de la vanne. On pourrait ainsi déterminer les conditions d'entrée dans la roue.

2.2 ÉCOULEMENTS DE FLUIDE IDÉAL AVEC CIRCULATION

En dehors des travaux sur la turbine elle-même, nous allons maintenant nous référer à quelques travaux qui décrivent les méthodes qu'on a tenté de reproduire ici pour les appliquer au problème de l'écoulement dans la turbine Banki. Nous verrons d'abord dans la section qui suit, quelques travaux montrant la méthode utilisée ici pour le calcul de l'écoulements de fluide idéal autour de corps générateurs de circulation. La section suivante abordera les approches utilisées pour calculer les jets.

La technique de résolution des écoulements potentiels par la méthode des éléments finis a trouvé sa version presque définitive dès le début des travaux sur le sujet (Zienkiewicz [31], Norrie/De Vries [28,32], Argyris/Mareczek [30]). Elle a rapidement acquis une grande popularité pour les calculs de turbines hydrauliques et de turbines à gaz, en raison de la complexité des géométries en cause et du fait qu'il s'agissait d'écoulements en conduite fermée.

Le traitement de la circulation nécessite un artifice supplémentaire, en plus de la solution directe du problème aux conditions aux limites. Cet artifice consiste à introduire une discontinuité dans le domaine de calcul de manière à en faire un domaine simplement connecté. Les conditions limites le long de cette nouvelle frontière du domaine dépendent de la circulation. Celle-ci doit être déterminée par une procédure itérative. La procédure de calcul est décrite de façon analogue par plusieurs auteurs.

Norrie/De Vries [32], Argyris/Mareczek [30], Pironneau [33] la décrivent dans une application théorique, pour le calcul de l'écoulement autour d'un profilé; alors que Keck/Haas [34], Combes [39], Laskaris [35], Hirsch [29] la décrivent dans le cadre d'une application pratique, à l'intérieur d'une méthode quasi-3D de calcul de l'écoulement dans une turbine (à gaz ou hydraulique). Cette méthode consiste à faire un calcul de l'écoulement méridional et un autre de l'écoulement inter-aube. Les deux résultats sont par la suite combinés pour fournir une solution 3D. L'écoulement inter-aube est celui qui est modélisé par un champ de potentiel avec circulation. C'est en fait cette partie seulement du traitement qui est retenue ici. Comme nous le verrons, l'écoulement dans la turbine peut en effet être adéquatement résolu par une approche 2D.

2.3 ÉCOULEMENTS À SURFACES LIBRES

Les jets issus d'orifices constituent un des rares types de problèmes qui ont connu une solution par les méthodes analytiques. Helmholtz en 1868 solutionnait déjà l'écoulement issu d'une fente dans un plan infini. Toutefois, malgré les raffinements apportés par Kirchhoff, puis Joukowski et Von Mises (qui a déterminé des coefficients de contraction pour une variété de géométries), ce ne sont que des jets issus de géométries simples qui ont pu trouver une solution analytique exacte.

Une des premières tentatives de résolution directe des équations du milieu par des approximations numériques est celle de Southwell et Vaisey (1946) [40]. Ils ont entrepris de solutionner divers écoulements en jet axisymétrique et 2D, issus de conduites ou de réservoirs infinis, par un calcul dans lequel l'équation de Laplace était exprimée en termes de différences finies et résolue par méthodes de relaxation. Pour déterminer la position initialement inconnue de la surface libre, ils ont procédé en utilisant une méthode d'essai et erreur basée sur le respect de l'équation de Bernoulli sur la ligne de courant formant la limite du jet. Cette méthode permettait d'aller au-delà des résultats de la transformation conforme puisqu'elle permettait, d'une part, d'ajouter l'effet de la gravité à la solution finale, et, d'autre part, de traiter de façon similaire n'importe quelle géométrie de l'embouchure. Le travail nécessaire avant d'arriver à une solution s'avérait cependant considérable. La méthode a été reprise ensuite par Rouse/Abel-Fetouh [41] pour évaluer systématiquement les coefficients de contraction des orifices axisymétriques.

Plusieurs auteurs ont tenté par la suite d'améliorer ces solutions par des méthodes visant à réduire l'ampleur du travail de calcul numérique. L'approche consistait à transformer les équations du milieu fluide de diverses façons en tirant parti des propriétés de l'écoulement. Hunt [42] a obtenu une solution quasi-définitive en procédant de cette façon. C'est cet ouvrage qui nous servira de référence pour valider le calcul des jets. Ces travaux seront donc décrits plus en détails dans ce qui suit lorsqu'il sera question de la validation du code de calcul.

Ces méthodes ont continué à être développées et utilisées avec succès par la suite, les auteurs cherchant à développer des méthodes applicables à des problèmes plus généraux. Par

exemple. Dias, Elcrat et Trefethen [45] et Dias et Elcrat [46] ont fait une application systématique des méthodes de leurs prédécesseurs, qui a permis de solutionner avec une série d'équations intégrales, paramétrées en fonction de la géométrie, l'écoulement issu d'embouchures de formes diverses. Dans tous ces cas, la méthode de résolution privilégiée était une résolution numérique d'équations intégrales dérivées des techniques de variables complexes.

L'application d'une approche éléments finis au calcul des jets pose problème. En effet, la méthode n'est que partiellement utile dans le traitement des jets, du fait que, la position des surfaces libres n'étant pas connue a priori, la méthode de discrétisation est inapplicable en première approximation. Seulement, on ne peut pas définir les éléments sans connaître la géométrie du domaine de calcul. Deux approches ont été adoptées pour solutionner ce problème. D'une part, la position de la surface libre peut être déterminée par l'ajout d'une variable supplémentaire, analogue à la densité, dans les équations de l'écoulement. D'autre part, la position des surfaces libres peut être déterminée par un calcul séparé de la résolution des équations de l'écoulement. C'est cette dernière approche qui a été privilégiée ici.

Ce ne fut que dans les années '70, que, d'abord Chan, Larock et Taylor [47, 48, 49], puis Sarpkaya et Hiriart [50], ont appliqué la méthode des éléments finis pour résoudre des problèmes de jet. Cette méthode était une procédure itérative dans laquelle le maillage était fait dans un domaine de calcul où la position des surfaces libres était choisie hypothétiquement dans une étape initiale. Une procédure d'essai et erreur où l'équation de Bernoulli fournissait le critère de convergence était ensuite appliquée pour localiser la position réelle de la surface libre. Sarpkaya et Hiriart [50] ont tenté de systématiser cette approche en calculant un déplacement proportionnel au débit à chaque pas, et en contrôlant la déformation du maillage, qui était divisé en une partie fixe et une partie déformable. Ce sont ces deux approches qui ont été combinées ici pour tenter la résolution du jet traversant la turbine Banki.

3 MODÈLE MATHÉMATIQUE

Dans cette section, nous allons expliquer les bases mathématiques du calcul qui sera tenté de l'écoulement dans la turbine Banki.

3.1 MODÈLE GÉNÉRAL DU MILIEU FLUIDE

3.1.1 NATURE DE L'ÉCOULEMENT ET HYPOTHÈSES DE CALCUL

3.1.1.1 Conditions réelles d'opération

La turbine Banki est utilisée dans un large éventail de conditions d'opération, notamment, pour des hauteurs de chute de 1 à 100 mètres et des débits variables. Ces variations de conditions d'opération entraînent des ajustements à la géométrie de la turbine et, notamment, à l'angle d'entrée de l'écoulement dans la roue et au rapport entre la largeur et le diamètre du rotor. Ce sont là des facteurs qui influencent la vitesse spécifique et donc les conditions d'écoulement. Les extrêmes des conditions rencontrées en pratique vont d'un jet très large où une grande partie de l'aubage est submergée et sous pression, c'est le cas d'installations à fort débit et basse chute, à un jet mince et un débit faible, où la turbine agit beaucoup plus comme une turbine à impulsion.

Par ailleurs, les installations typiques des turbines Banki sont des centrales de très petite taille. Dans ces installations, les conditions d'opération seront variables au cours d'une année, et la turbine fonctionnera fréquemment en dehors des conditions pour lesquelles elle a été dessinée.

La modélisation qu'on a tenté de réaliser ici s'adresse plutôt aux conditions idéales d'opération. Mais même dans ces conditions, l'écoulement demeure d'une grande complexité. Nous allons d'abord tenter d'en discerner les principales caractéristiques, avant d'établir les approximations qui doivent être faites pour en arriver au modèle développé ici.

D'abord, comme l'on montré les observations des différents auteurs cités plus haut, et comme c'est le cas dans la majorité des écoulements en turbomachine (ou prenant la forme de jets), l'écoulement dans la turbine est turbulent.

D'autre part, la présence des aubes dans l'écoulement génère des zones d'écoulement secondaire. Une des raisons à cela vient du fait que l'angle d'entrée dans la roue n'est pas constant sur la partie de la circonférence du rotor traversée par le jet. Ceci est vrai même lorsque la turbine fonctionne dans les conditions optimales de conception. L'aubage est construit en fonction d'une valeur donnée de l'angle d'attaque. Donc, pour une partie de l'aubage, l'angle d'attaque sera à côté de la valeur de conception. Par ailleurs, l'angle d'entrée dans le second passage est lui aussi, et même dans les meilleures conditions, inconstant sur la circonférence de la roue.

Autre phénomène important : à partir de la sortie de la tuyère, l'écoulement devient un jet exposé à l'air ambiant. La présence de surfaces libres, alliée au phénomène de turbulence, a pour conséquence de permettre l'entrée d'air dans l'écoulement. L'effet de ce mélange d'air dans l'eau se fait surtout sentir au second passage dans l'aubage, alors que la pénétration de l'air dans le jet devient plus importante.

Contrairement aux turbines Francis ou Kaplan, il n'y a pas de symétrie radiale de l'écoulement dans la turbine Banki. Il n'y a pas de symétrie axiale non plus, du fait qu'aux extrémités du rotor, des effets de bout se font sentir. Ces effets seront cependant négligés ici, comme nous le verrons dans la section suivante.

Finalement, le régime d'écoulement dans la turbine, et plus particulièrement à l'intérieur des pièces en rotation, n'est pas stationnaire mais bien cyclique.

Les aubes entrent l'une après l'autre dans le jet, le traversent et en ressortent. Si on considère un point donné de l'espace occupé par le fluide, on verra que le champ de vitesse à ce point se modifie au passage de chaque aube. La vitesse du fluide est plus basse si ce point est éloigné de l'aube. Lorsque celle-ci s'approche, la vitesse à ce point augmente, alors que lorsque celle-ci s'éloigne, elle diminue.

La non-stationnarité du régime d'écoulement de la turbine Banki est d'autant plus difficile à traiter qu'elle est plus complète que dans la majorité des autres cas. En effet, dans la plupart des

turbines, comme les turbines Francis ou Kaplan, bien que les conditions du fluide en un point considérées par rapport à un référentiel fixé à la machine varient cycliquement, comme nous venons de le voir, ces mêmes conditions deviennent constantes lorsque vues par rapport à un référentiel fixé au rotor. Cette condition stationnaire de l'écoulement relatif ne sera vraie cependant qu'en autant que les conditions à l'entrée du fluide dans le rotor soient uniformes partout sur le pourtour du rotor. C'est-à-dire en autant qu'il y ait une symétrie radiale de l'écoulement à l'intérieur du rotor.

Pour la turbine Banki, les conditions d'écoulement dans le rotor, vues à partir d'une aube, varient. L'aube se trouve d'abord à l'air libre, elle entre ensuite dans le jet et les conditions à l'entrée de l'aubage varient légèrement à travers le jet. Puis l'aube se dirige vers son second passage dans le jet, où l'écoulement vu à partir de l'aube se fait maintenant dans le sens inverse par rapport au premier passage. Finalement, l'aube retourne à l'air libre.

Ici, l'écoulement ne s'approche de conditions stationnaires qu'au moment du premier passage dans l'aubage, alors que les conditions d'entrée de l'eau dans les aubes sont les plus uniformes.

Une approche sera adoptée ici, qui permettra de tenir compte de cet effet instationnaire, au moyen d'une approximation. Elle sera présentée à la section suivante.

3.1.1.2 Modèle de l'écoulement

L'écoulement dans la turbine Banki est donc un écoulement complexe, dans lequel on retrouve turbulence, zones d'écoulement secondaire, surfaces libres, mélange d'air et absence de symétrie. Pour décrire adéquatement cet écoulement à partir d'une simplification valable des équations générales de Navier-Stokes, il faudrait une approximation qui tienne à la fois compte de la turbulence et de la présence d'air dans l'écoulement, et une géométrie non seulement complexe, mais partiellement inconnue en début de calcul, puisque la position des surfaces libres n'est pas, a priori, connue. Un tel calcul, bien qu'en théorie possible avec les outils de modélisation actuels, nécessiterait un effort considérable, d'importants moyens de calcul et beaucoup de temps. Dans cette première approche de la turbine Banki, un modèle plus simple (beaucoup plus simple), plus

fiable numériquement, plus facile à mettre en œuvre et utilisant des codes de calcul disponibles au préalable a été adopté. C'est pourquoi le présent calcul a été fait, dans une optique de simplicité, en tirant profit des symétries de la géométrie de la turbine, et en utilisant une approximation somme toute grossière des conditions d'écoulement.

Pour un rotor suffisamment allongé, l'écoulement dans la roue offrira un certain niveau de symétrie dans le sens de l'axe de rotation du rotor. Cependant, la présence de surfaces libres sur les côtés de la roue, sur lesquelles la pression sera nulle, influencera la distribution de vitesse dans cette direction. Sonnek [2] décrit une approche permettant de tenir compte de cet effet dans le calcul du rendement théorique de la turbine. Mais le rotor des turbines Banki est, dans plusieurs cas (surtout dans le cas d'installations de basse chute), dessiné dans une forme plutôt allongée, dans laquelle les effets des bouts sur le reste de l'écoulement restent négligeables. Dans ces cas, l'approximation de symétrie dans l'axe de rotation du rotor peut être considérée valide, et elle sera mise à profit ici. Elle s'applique à l'ensemble du volume fluide contenu entre la section du canal d'amenée où l'écoulement rectangulaire est entièrement formé et l'extrémité du jet.

Le code de calcul qui était disponible au début de ce travail et qui a servi de base à ce travail, est un code qui calcule des écoulements incompressibles non visqueux avec circulation, sur la base d'un potentiel de vitesse.

C'est le modèle 2D le plus simplifié qui puisse se faire de l'écoulement dans cette turbine. La prise en compte de la circulation est nécessaire en raison de la présence des aubes dans le jet qui génèrent cette circulation, et qui ont un impact important sur le champ de vitesse.

Pour en arriver à réduire la réalité physique de l'écoulement dans la turbine à ce modèle simplifié, un certain nombre de caractéristiques de l'écoulement seront définies.

L'écoulement d'eau est considéré parfaitement incompressible. Cette approximation est généralement admise d'emblée dans les problèmes d'hydrodynamique, étant donnée la faible compressibilité de l'eau.

L'écoulement est aussi considéré comme étant constitué d'une seule phase uniforme. On exclut la présence d'air dans l'eau et la possibilité qu'il existe des zones de cavitation. Dans le cas

d'un jet turbulent traversant des obstacles immergés, comme c'est le cas ici, cette approximation est beaucoup plus éloignée de la réalité physique.

On considère par ailleurs un fluide idéal, c'est-à-dire que les effets de la viscosité sur la distribution de vitesse sont considérés négligeables. L'approximation sera meilleure pour un haut nombre de Reynolds, et tant qu'il n'y aura pas décollement de la couche limite causant des zones d'écoulement secondaire. Encore une fois, cette approximation amène dans ce cas-ci, une grande marge d'erreur par rapport à la situation réelle. Les écoulements dans les turbines Banki ont bien des nombres de Reynolds élevés, mais la présence d'obstacles à l'écoulement créera des zones d'écoulement secondaire.

S'ajoute à cela l'hypothèse que l'écoulement est irrotationnel. Cette hypothèse est basée sur l'absence de forces de cisaillement dans le fluide non visqueux et de l'imposition de conditions limites sans rotation aux limites du domaine. Des forces de cisaillement sont en réalité présentes dans l'écoulement d'eau de la turbine. Les effets les plus importants de ces forces se manifestent près des parois en contact avec le fluide, dans la couche limite. Le modèle utilisé ici fait l'hypothèse que la couche limite est partout très mince, de sorte qu'en tout point de la région sur laquelle le calcul est effectué, ces effets de cisaillement sont nuls. Les effets du cisaillement dans la couche limite quant à eux seront cependant pris en compte par l'imposition, via les conditions limites, d'une circulation dans l'écoulement. Ils influenceront alors grandement la distribution de vitesse.

Cette circulation dans l'écoulement peut être expliquée de la façon suivante. L'adhérence du fluide sur les parois des aubes et les forces de cisaillement qui s'ensuivent génèrent des tourbillons qui sont emportés par l'écoulement. La circulation dans ces tourbillons est compensée par une circulation égale et de sens contraire créée par un ajustement de la distribution de vitesse dans l'ensemble de l'écoulement. De la sorte, le bilan de la circulation dans l'ensemble du volume fluide reste nul en tout temps. La théorie des fluides idéaux veut en effet que lorsqu'un volume de fluide est sans rotation à un moment donné, il le restera toujours par la suite. Or, dans le cas de la turbine, à la mise en marche de l'appareil, le volume de fluide est au repos, donc exempt de rotation.

Dans ce travail, on s'est intéressé aux conditions d'écoulement en régime permanent. Il faut pour ce faire négliger le phénomène instationnaire que constitue le passage cyclique de chaque aube à travers le jet. Cela se fera en considérant les aubes à un endroit fixe dans la géométrie du domaine de calcul, mais dotées d'une vitesse. On considère que le positionnement des aubes n'influencera pas globalement l'allure de l'écoulement. Cela veut dire que les conditions sont supposées à peu près constantes à travers le jet. Cela sera d'autant plus valide que le nombre d'aubes de la turbine considérée sera élevé.

Notons que les aubes qui ne se trouvent pas submergées n'influencent pas l'écoulement. La contribution des aubes submergées à l'établissement de l'écoulement tel qu'établi en considérant l'effet de leur présence à un point fixe et en considérant qu'elles sont dotées d'une vitesse de rotation autour de l'axe du rotor donnera donc une approximation d'une valeur moyenne dans le temps de l'écoulement réel. Les effets de la variation dans le temps des conditions d'écoulement sont négligés.

Finalement, les effets thermiques sont aussi considérés négligeables.

3.1.2 ÉQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT

3.1.2.1 Équation de Laplace

Cette série d'hypothèses sur les caractéristiques de l'écoulement permet d'établir l'ensemble d'équations suivant, qui décrit les conditions d'écoulement en chaque point du domaine de calcul défini dans la turbine.

La condition d'irrotationnalité de l'écoulement plan peut s'écrire :

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (3.1)$$

où \mathbf{v} est la vitesse du fluide en un point quelconque.

Elle permet l'existence d'un potentiel de vitesse scalaire ϕ sur l'ensemble du domaine de calcul duquel doivent alors être exclues les zones de rotation issues des aubes décrites précédemment. Ces zones seront en fait des lignes, ou des surfaces infiniment minces. Elles servent plus à produire une configuration réaliste du champ de vitesse qu'à représenter un phénomène physique précis. Nous en reparlerons plus longuement à la section 3.2.

Ce potentiel est défini en fonction de la vitesse \mathbf{v} par:

$$\nabla \phi = \mathbf{v} \quad (3.2)$$

La condition d'incompressibilité, quant à elle, peut s'écrire :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.3)$$

La combinaison de ces deux conditions résulte en une équation de Laplace en termes du potentiel de vitesse, qui permet de décrire entièrement le champ de vitesse dans le domaine de calcul :

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.4)$$

En plus de cette équation, une condition doit être spécifiée sur tous les points de la frontière du domaine de calcul, pour que le problème soit entièrement défini. Il s'agit d'une condition scalaire appliquée soit au potentiel (condition de Dirichlet) ou à une de ses dérivées

(condition de Neumann). Les conditions aux frontières du domaine applicables à ce problème seront décrites plus loin, à la section 3.1.3.

3.1.2.2 Équation de Bernoulli

La résolution de l'équation précédente donne le champ de vitesse dans l'écoulement. La pression sera pour sa part obtenue de l'équation de Bernoulli, valide le long d'une même ligne de courant :

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z + h_w \quad (3.5)$$

où: H est la hauteur de charge totale en un point de la ligne de courant.

v la vitesse,

p la pression.

g l'accélération gravitationnelle.

γ le poids spécifique de l'eau.

z la hauteur par rapport à un point de référence quelconque. et

h_w exprime un travail fait sur ou par le fluide.

Notons qu'avec l'approximation d'un fluide idéal, les forces de friction dans le fluide sont considérées nulles. On considère donc qu'il n'y a pas de pertes de charge dans l'écoulement. Avec la prise en compte de h_w , H sera constant sur une même ligne de courant.

En amont comme en aval de l'aubage, il n'y a pas de travail fait par ou sur le fluide, et h_w est nul. Dans l'aubage cependant, un travail est fait par le fluide sur les aubes et h_w possède une valeur qui n'est pas nulle (elle est en fait négative).

En posant H uniforme sur toutes les lignes de courant à l'entrée de la turbine. on peut écrire, pour tout point 1 en amont de l'aubage, et tout point 2 en aval de l'aubage :

$$H_1 = H_2 + H_w \quad (3.6)$$

H_w correspond à la perte de charge occasionnée par le travail fait par le fluide sur l'aubage. Il correspond au total du travail fait par le fluide dans son passage à travers l'aubage. H_w sera obtenu, de façon approximative, du calcul du changement de la quantité de mouvement angulaire dans le jet, et de là, des forces appliquées par le fluide sur les aubes.

Selon le modèle de régime permanent développé plus haut, les conditions à travers le jet sont considérées constantes. Toutes les lignes de courant du jet sont donc considérées identiques. Le transfert d'énergie avec l'aubage sera donc aussi considéré identique pour toutes les lignes de courant.

Le terme de transfert d'énergie au fluide par le rotor dans l'équation de Bernoulli H_w peut être exprimé en terme du travail de la façon suivante:

$$H_w = \frac{\dot{W}}{\gamma Q} \quad (3.7)$$

où : \dot{W} est la puissance transmise.
 γ est le poids spécifique du fluide et
 Q le débit volumétrique.

Il est possible d'expliciter ce terme si on ne considère qu'un passage à travers l'aubage. La puissance peut en effet être exprimée en termes des vitesses dans la roue à l'aide de l'équation d'Euler pour les turbines. Pour le premier passage dans l'aubage, le changement de quantité de mouvement angulaire donnera selon l'équation d'Euler :

$$\dot{W} = \rho Q (U_2 V_{u2} - U_1 V_{u1}) \quad (3.8)$$

où: U est la vitesse de rotation de l'aubage,
 V_u est la composante de la vitesse absolue du fluide orientée dans la direction de la rotation de l'aubage,
 ρ la densité du fluide et
 Q le débit.
 Les indices 1 et 2 indiquent respectivement l'entrée et la sortie de l'aubage.

Les vitesses U_1 et U_2 peuvent être exprimées en fonction de la vitesse de rotation ω de la roue :

$$U_1 = \omega r_1 \quad \text{et} \quad U_2 = \omega r_2 \quad (3.9)$$

r_1 et r_2 étant les rayons à l'entrée et à la sortie de l'aubage. H_w sera alors donné par :

$$H_w = \frac{\dot{W}}{\gamma Q} = \frac{\omega}{g} (r_2 V_{u2} - r_1 V_{u1}) \quad (3.10)$$

Les deux vitesses V_u devront cependant être évaluée approximativement. D'une part, leur valeur en un point donné dépend de la position des aubes, d'autre part, l'épaisseur des aubes crée des points d'arrêt qui rendent impossible d'extraire les valeurs appropriées des vitesses impliquées dans l'équation précédente. Il faudrait pour extraire la vitesse à l'entrée de l'aubage que les aubes soient infiniment minces.

Le modèle de régime stationnaire utilisé ici veut que l'effet de l'aubage sur l'écoulement soit indépendant de sa position. Il faut donc une valeur approximative de la vitesse à l'entrée du rotor qui représente l'effet global de l'aubage sur l'écoulement. L'approche adoptée ici a été d'approximer la grandeur de cette vitesse par la moyenne des vitesses de chaque côté de la sortie de la tuyère, c'est-à-dire, les vitesses au début de chacune des surfaces libres. En ces points, les effets du point d'arrêt créé par l'épaisseur des aubes est minimal. La direction de la vitesse V_u sera donnée par l'angle donnant une entrée sans choc à l'aubage. Soit :

$$V_{u1} = \left(\frac{V_i + V_e}{2} \right) \sin \beta \quad (3.11)$$

où V_i et V_e sont les vitesses au début de la surface libre, respectivement du côté intrados et extrados de l'aubage, et β est l'angle d'entrée dans l'aubage. Dans des conditions d'entrée sans choc, il sera donné par l'angle formé par l'extrémité de la tuyère et la circonférence de la roue. Cette circonstance surviendra dans des conditions optimales d'opération.

La vitesse à la sortie de l'aubage, V_{u2} , sera quant à elle donnée par la vitesse à l'extrémité du jet. Celle-ci est imposée dans le calcul comme étant uniforme à travers l'épaisseur du jet.

Pour être en mesure d'appliquer cette approche, il est nécessaire de ne considérer qu'un seul passage dans l'aubage. Considérer le second passage demanderait de faire des hypothèses sur les vitesses intermédiaires, pour lesquelles nous manquons d'information.

Cette expression du terme de transfert d'énergie entre le fluide et le rotor ne considère que l'effet global de l'aubage : H_w . Il faudra, plus loin, considérer l'effet de ce transfert d'énergie en chaque point de la ligne de courant à travers l'aubage, soit le terme h_w de l'équation (3.5). Cela demandera de nouvelles approximations. Nous verrons ces traitements à la section 3.3, où sera exposée la méthode de calcul de la position des surfaces libres.

3.1.3 CONDITIONS AUX LIMITES

L'intégrale sur le contour du domaine est entièrement déterminée par les conditions aux limites. Elle peut être explicitée davantage.

Le produit scalaire du gradient du potentiel de vitesse par la normale au contour n'est rien d'autre que la composante de la vitesse normale au contour v_n .

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = v_n \quad (3.13)$$

C'est cette condition qui est imposée partout sur le contour, à l'exception d'une portion où c'est plutôt le potentiel qui est imposé, à une valeur arbitraire, pour éviter qu'il demeure indéterminé à une constante près.

La vitesse normale au contour prendra différentes valeurs le long de ce contour. Un domaine de calcul de l'écoulement, avec les différentes parties de son contour, est montré à la figure 3.1. Il représente un cas général de turbine Banki.

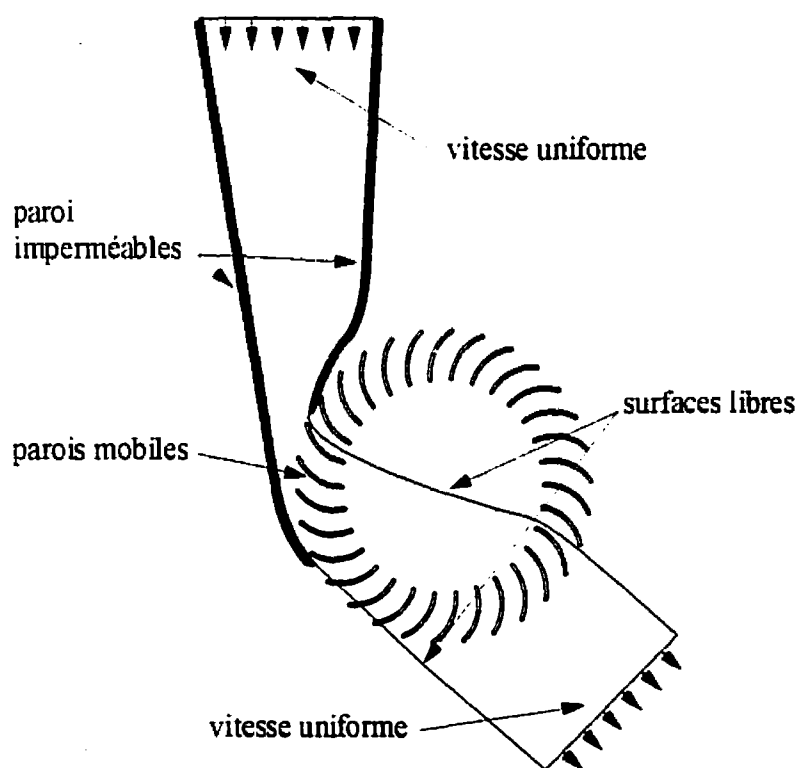


Figure 3.1 : Modèle de l'écoulement et conditions aux limites

Vitesses uniformes d'entrée et de sortie

À l'entrée et à la sortie de l'écoulement, on fixe les limites du domaine de façon à avoir des conditions uniformes de vitesse. Les phénomènes en milieu continu décrits par l'équation de Laplace présentent la particularité que les perturbations s'atténuent à mesure qu'on s'éloigne de leur source. L'entrée et la sortie de l'écoulement seront donc situées suffisamment loin des dernières perturbations du champ de vitesse pour que les conditions uniformes imposées correspondent aux conditions qui surviendraient dans un domaine réel.

L'imposition d'une valeur de la vitesse à l'une ou l'autre de ces portions du domaine permet d'imposer un débit donné dans la turbine. À l'une ou l'autre des extrémités de l'écoulement, on peut aussi imposer une valeur fixe du potentiel de vitesse. Cela évite qu'il soit indéterminé.

En raison de la présence de discontinuités de circulation dans le domaine, il est intéressant, pour simplifier la mise en œuvre du calcul, comme nous le verrons plus loin, de faire passer ces discontinuités par la section de sortie. On ne peut alors imposer le potentiel de vitesse à cet endroit puisqu'on ne connaît pas a priori le saut de potentiel généré par les discontinuités. C'est pourquoi, dans ce calcul, le potentiel fixe est appliqué à l'entrée du domaine et la vitesse est imposée à la sortie.

Conditions aux parois solides

Sur les parois solides, deux conditions physiques sont appliquées: la condition d'imperméabilité et la condition de glissement parfait, du fait que le fluide n'a aucune viscosité. La première se traduit par l'imposition d'une vitesse normale nulle relative à la vitesse de la paroi, la seconde par le fait qu'il n'y a pas de contrainte sur la composante tangente à la surface. Ces conditions seront toutefois appliquées différemment selon que les parois solides sont fixes (par exemple pour les parois de la tuyère) ou mobiles (soit pour les aubes).

Parois fixes

Pour les parois fixes, la condition d'imperméabilité se traduit par l'imposition d'une valeur nulle à la composante normale de la vitesse *absolue* du fluide, c'est-à-dire une condition de Neumann nulle :

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.14)$$

Parois mobiles

Pour les parois mobiles, par contre, c'est la composante normale de la vitesse du fluide *relative à la paroi* qui se trouve à être nulle. Or, c'est la vitesse absolue du fluide qui est en jeu dans l'équation 3.14. Comme l'aube est en mouvement, la composante normale à la paroi de la vitesse absolue du fluide n'est pas nulle. Elle est en fait égale à la composante normale de la vitesse absolue de la paroi, du fait de la condition d'imperméabilité (figure 3.2). Il s'agit donc d'une condition de Neumann non nulle. Elle s'écrit:

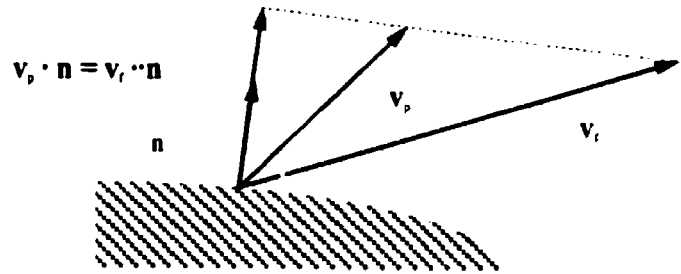


Figure 3.2 : Vitesses à la paroi d'une aube

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n} \quad (3.15)$$

avec \mathbf{v}_f la vitesse absolue du fluide en un point adjacent à la paroi, et \mathbf{v}_p , la vitesse absolue de la paroi en ce point.

La vitesse de tout point de l'aube, et notamment d'un point situé sur la paroi, peut être exprimée en fonction de la vitesse de rotation de la roue et de la position de ce point. Ce qui donne:

$$\mathbf{v}_p = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p \quad (3.16)$$

où ω est la vitesse de rotation de l'aube autour de l'axe du rotor, et \mathbf{r}_p la position d'un point par rapport à cet axe.

L'ensemble des aubes de la turbine constitue un solide rigide en rotation. Ce fait permet de simplifier l'expression ci-dessus en introduisant la vitesse de rotation du rotor. Celle-ci étant la même pour toutes les aubes, on peut contrôler les conditions sur les aubes pour toute vitesse de rotation de la roue en ne modifiant qu'une seule donnée scalaire. Si le système de coordonnées a son origine sur cet axe, on a :

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \omega(xn_y - yn_x) \quad (3.17)$$

où: ω est la vitesse de rotation du rotor,
 x et y , les coordonnées cartésiennes situées à la paroi d'une aube, et
 n_x et n_y , les composantes de la normale à la paroi en ce point.

C'est donc par la condition de l'imperméabilité des parois mobiles qu'on peut introduire la vitesse de rotation au rotor dans les données du problème.

Surfaces libres

Les surfaces libres constituent aussi une limite du domaine de calcul, sur laquelle une condition doit être imposée. Leur position est toutefois inconnue *a priori* et doit être déterminée par le calcul. Dans la méthode adoptée ici, le calcul de la position des surfaces libres sera dissocié de celui du champ de vitesse. Un processus itératif sera plutôt utilisé pour déterminer cette position, processus qui se fera en deux temps. D'abord, une position des surfaces sera fixée en fonction des hypothèses de calcul (que nous verrons plus loin), ce qui permettra la résolution du système d'équations décrivant l'écoulement. Ensuite, une nouvelle position des surfaces libres sera calculée en fonction des conditions de résultats obtenus du calcul de l'écoulement. Ce processus se poursuivra ainsi jusqu'à la convergence du résultat.

Nous reviendrons plus en détails sur cette procédure à la section 3.3. Mentionnons ici que, comme les surfaces libres sont des lignes de courant, aucun écoulement ne les traverse. Elles

peuvent donc être traitées comme des parois fixes dans le calcul du champ de vitesse. Dans ce calcul, la composante normale de la vitesse absolue y est donc imposée nulle :

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.18)$$

Discontinuités de circulation

Une dernière portion du contour du domaine de calcul reste à se voir assigner des conditions limites. Il s'agit des discontinuités qui sont créées pour exclure du domaine de calcul les zones de circulation issues des aubes. Elles nécessitent un traitement particulier qui est décrit à la section suivante.

3.2 DISCONTINUITÉS DE CIRCULATION

3.2.1 ORIGINE DU PHÉNOMÈNE

Comme nous l'avons vu plus haut, la présence de corps asymétriques dans l'écoulement amène une circulation non-nulle de la vitesse autour de ces corps, en violation de la condition d'irrotationnalité, qui est nécessaire à la validité du modèle de potentiel de vitesse. Pour que l'équation de Laplace s'applique, il faut que pour tout contour fermé à l'intérieur du domaine de calcul, l'intégrale suivante, i. e. la circulation, soit nulle:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (3.19)$$

C'est la condition d'irrotationnalité. Elle ne sera pas respectée si dans le domaine on peut tracer un contour à l'intérieur duquel se trouvera le corps générateur de circulation. Pour atteindre la condition d'irrotationnalité, il suffit cependant d'exclure du domaine de calcul les zones correspondant aux tourbillons que crée l'adhérence du fluide aux parois des corps immergés. Ces zones sont issues de chaque corps asymétrique et rejoignent l'extérieur du domaine de calcul (figure 3.3). De cette façon, le domaine devient simplement connecté et on ne peut tracer de contour autour d'un corps asymétrique générateur de circulation. On ne peut plus obtenir :

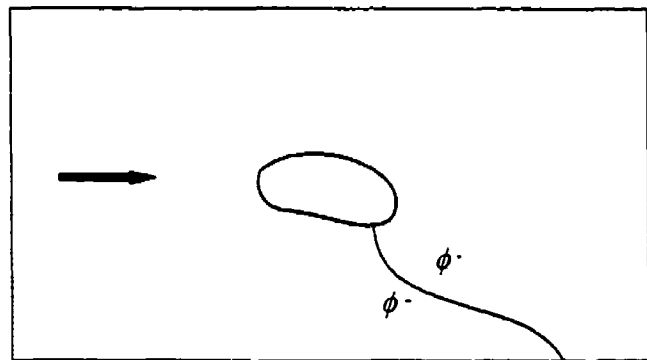


Figure 3.3 : Discontinuité de circulation

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \neq 0 \quad (3.20)$$

où que ce soit dans le domaine de calcul, et la condition d'irrotationnalité est respectée.

La position exacte de ces discontinuités n'influence pas le résultat final, du point de vue de la vitesse. Celle-ci est en effet continue à travers la discontinuité. La position de cette dernière est donc arbitraire. Sa position sera alors fixée de manière à simplifier le dessin du modèle géométrique et la mise en œuvre du calcul. On a par exemple évité, dans les problèmes traités ici, qu'elle ne traverse les surfaces libres.

Cette exclusion génère de nouvelles frontières au domaine de calcul, sur lesquelles on doit donc imposer des conditions sur $\nabla\phi$ ou ϕ . Cela amène une difficulté supplémentaire dans la solution du système d'équations. En effet, les conditions aux limites qu'on doit y imposer sont inconnues au début du calcul. Aucune valeur ne peut être appliquée à la vitesse ou au potentiel le long de ces surfaces. De fait, seul l'écart de la valeur du potentiel de vitesse de part et d'autre de ces surfaces peut être explicité le long de ces surfaces. Il est en effet lié à la circulation dans l'écoulement par la loi de Biot-Savart, du fait que :

$$\Gamma = \int_{-}^{+} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \phi^{+} - \phi^{-} \quad (3.21)$$

- où: l'intégration se fait sur un contour dans le domaine de calcul entourant le corps sauf pour la région de discontinuité qui en est issue,
 les limites d'intégration + et - indiquent des points situés de chaque côté de cette discontinuité, et
 ϕ^{+} et ϕ^{-} sont les valeurs du potentiel de vitesse en ces points.

En d'autres mots, le saut de potentiel de vitesse à travers la discontinuité issue d'un corps est égal à la circulation générée par ce corps dans l'écoulement. La circulation est une valeur unique associée à chacun des corps immergés. Le saut de potentiel à travers chacune des discontinuités introduites dans le domaine sera donc constant le long de cette discontinuité.

3.2.2 TRAITEMENT

Les valeurs de ϕ sur la discontinuité de circulation, de même que la valeur de cet écart équivalent à la circulation générée par le corps immergé sont inconnus *a priori*. L'imposition des conditions limites sur cette portion des frontières du domaine constitue donc un problème. Il pourra cependant être résolu en incluant implicitement le calcul de ces conditions limites à la résolution numérique globale du système d'équations différentielles. Nous verrons plus en détail cette approche à la section 4.2.

Ce calcul implicite demandera de déterminer itérativement la valeur de la circulation autour de chacun des corps présents. La convergence de ce calcul itératif sera atteinte par la satisfaction de la condition dite de Kutta-Joukowski, qui veut que la pression (ou, de façon équivalente, la grandeur de la vitesse) soit égale de chaque côté du bord de fuite, à l'origine de la discontinuité.

Dans la mise en œuvre du calcul, la condition imposée à cette frontière du domaine est donc un saut de potentiel, c'est-à-dire une différence entre la valeur du potentiel sur les deux côtés d'une discontinuité. Cet écart est égal à la circulation générée par le corps duquel est issue la discontinuité. Cette condition peut être formulée, tel que nous l'avons vu, ainsi :

$$\phi^+ - \phi^- = \Gamma \quad (3.22)$$

Notons que Γ est une valeur unique pour chaque discontinuité, et que, bien que ϕ^+ et ϕ^- varient le long de la discontinuité, l'écart entre ces variables est constant. Le traitement particulier que nécessitera cette condition aux limites dans la résolution du problème par éléments finis sera décrit plus en détail, dans le cadre de la discrétisation du problème, à la section 4.2.

3.3 SURFACES LIBRES

Une difficulté majeure du calcul de l'écoulement dans la turbine Banki par une approche éléments finis est le fait que la position des surfaces libres apparaissant dans la roue n'est pas connue a priori. La discrétisation du problème demande en effet la connaissance préalable de la géométrie du domaine de calcul pour établir les équations matricielles.

Deux types d'approche peuvent alors être envisagés pour résoudre ce dilemme: soit qu'on calcule la position des surfaces libres en dehors du calcul éléments finis, et qu'on corrige le maillage en calculant la position de la surface libre par un processus itératif; soit que la géométrie du domaine de calcul n'est définie qu'une fois, et que le calcul de la position des surfaces libres se fait à même le calcul éléments finis. Cette approche nécessite alors l'ajout de nouvelles variables au système d'équations, qui serviront à établir l'espace occupé effectivement par le fluide, par exemple par la programmation d'éléments spéciaux di-phasiques.

C'est la première approche qui a été privilégiée ici. Elle s'est imposée par l'adoption préalable du modèle de fluide idéal pour le calcul de l'écoulement et par la disponibilité d'un code de calcul.

Selon cette approche, il faut établir une condition permettant de déterminer la position que devrait occuper la surface libre à partir des valeurs de la distribution de vitesse obtenues du calcul par éléments finis. Cette condition est basée sur la grandeur de la vitesse le long de la surface libre, qui doit satisfaire l'équation de Bernoulli, puisque la surface libre est une ligne de courant. Il s'agira de déplacer chaque point de la surface libre en fonction de l'écart qu'il y aura à ce point entre la vitesse calculée par éléments finis et la vitesse qui respecterait à ce point l'équation de Bernoulli.

Comme vu précédemment, les surfaces libres sont traitées dans le calcul éléments finis comme des parois imperméables. La vitesse y sera établie en fonction du fait qu'une pression puisse s'exercer sur le fluide à cet endroit. Or, dans le cas du jet, la pression tout le long de la surface libre est la pression atmosphérique. En reprenant l'équation de Bernoulli telle

qu'exprimée à la section 3.1.2.2 (équation 3.5), et en excluant le terme de pression défini comme nul. on a pour les points situés sur chacune des surfaces libres :

$$H_{sl} = \frac{v^2}{2g} + z + h_w = \text{const.} \quad (3.23)$$

Le terme de travail sur le fluide h_w est nul en dehors de l'aubage, mais il ne l'est plus là où la surface libre traverse l'aubage. Pour établir une valeur de la vitesse en ces points, il faut encore définir une expression de h_w en ces points.

Une expression du transfert total d'énergie au premier passage H_w a été établie à la section 3.1.2.2 (équation 3.10) :

$$H_w = \frac{\dot{W}}{\gamma Q} = \frac{\omega}{g}(r_2 V_{u2} - r_1 V_{u1}) \quad (3.10)$$

où V_{u1} et V_{u2} sont évalués de façon approximatives. Nous avons aussi posé que cette expression était valide pour toutes les lignes de courant passant dans le rotor.

Nous allons faire l'approximation, dans le calcul qui suit, que le terme h_w est le résultat d'une répartition linéaire du transfert d'énergie H_w dans l'aubage. Soit :

$$h_w(r) = \left(\frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \right) H_w = \left(\frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \right) \frac{\omega}{g} (r_2 V_{u2} - r_1 V_{u1}) \quad (3.24)$$

où r représente la position radiale, par rapport au centre du rotor d'un point de la surface libre. Les indices 1 et 2 sont les sections d'entrée et de sortie de l'aubage, c'est-à-dire les positions des rayons intérieur et extérieur de la roue. Notons que h_w ne peut être défini de cette manière que pour le premier passage dans l'aubage, ce qui exclut les valeurs de r du côté aval de la roue.

Une telle approximation est nécessaire faute d'information sur le comportement du fluide dans le rotor, et sera d'autant plus acceptable que l'influence de ce terme sur la position des surfaces libres sera faible.

L'équation de Bernoulli s'écrira donc, pour les surfaces libres :

$$H_{st} = \frac{v^2}{2g} + z + h_w(r) = \text{const.} \quad (3.25)$$

Au début de la surface libre, soit à l'entrée de l'aubage, on a :

$$H_{st} = \frac{v_1^2}{2g} + z_1 \quad (3.26)$$

Avec v_1 et z_1 , les conditions à l'entrée de l'aubage.

La vitesse en tout point de la surface libre peut alors être calculée, du fait de la constance de H_{st} comme suit :

$$H_{st} = \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{v^2}{2g} + z + h_w(r) \quad (3.27)$$

Soit, en explicitant v :

$$v^2 = v_1^2 + 2g(z_1 - z) - 2gh_w(r) \quad (3.28)$$

avec $h_w(r)$ donné par l'équation (3.24) ci-dessus.

La position de la surface libre peut alors être calculée en déplaçant la surface en fonction de l'écart entre la vitesse calculée en chaque point et cette vitesse de la surface libre.

Ce déplacement se fera sur la base de la conservation du débit dans le jet. Lorsqu'on déplace la surface libre, la vitesse devra en effet s'ajuster de manière à conserver un même débit. Ainsi, si le jet est élargi, la vitesse devrait être réduite. De même, si la vitesse calculée selon l'équation de Bernoulli est plus grande que celle calculée par l'équation de Laplace, on cherchera à réduire la largeur du jet pour accélérer le fluide.

On aura :

$$v_d L = v_p (L + d) \quad (3.29)$$

où v_{st} est la vitesse calculée par l'équation de Bernoulli,
 v_s est la vitesse calculée par l'équation de Laplace,
 d est le déplacement de la surface libre dans une direction orientée vers l'extérieur
du jet et
 L est une grandeur reliée aux dimensions du jet.

Ce qui donne, lorsqu'on explicite le déplacement à imposer à la surface libre:

$$d = L \left[\left(\frac{v_s}{v_{st}} \right) - 1 \right] \quad (3.30)$$

La grandeur L n'a pas à être déterminée précisément ici, puisque d doit converger vers zéro. Le choix de sa valeur servira en fait à contrôler la convergence du calcul.

Une nouvelle géométrie du problème ayant ainsi été créée, il faudra refaire le calcul des vitesses par une nouvelle résolution de l'équation de Laplace par éléments finis. Cela donnera une nouvelle distribution de vitesse le long des surfaces libres, qui ne respecteront pas nécessairement l'équation de Bernoulli. Un nouveau déplacement de chaque surface libre sera alors fait, et ainsi de suite, dans un processus itératif. La position de la surface sera trouvée lorsque, à tous les points, la grandeur de la vitesse satisfera l'équation de Bernoulli, avec une précision jugée suffisante.

4 DISCRÉTISATION ET TRAITEMENT NUMÉRIQUE

Dans cette section, nous allons voir comment seront discrétisées les équations du modèle de l'écoulement et comment elle seront résolues. Nous reprenons ici la nomenclature et le développement exposés par Dhatt et Touzot [25], où l'on pourra se référer pour une description plus complète.

La méthode numérique suivie pour résoudre le système d'équations différentielles décrivant l'écoulement dans la turbine est la méthode des éléments finis. Sans revenir sur l'ensemble de la méthode, les principales étapes suivies seront rappelées ici brièvement. On commencera par résumer l'approximation qui est faite pour discrétiser les équations différentielles, pour ensuite écrire l'équation matricielle résultante. On expliquera ensuite le traitement des conditions de frontière par des éléments de contour, et suivra pour finir une explication de la méthode de résolution. On reviendra dans les sections suivantes sur les traitements spéciaux qui sont nécessaires pour prendre en compte les discontinuités de circulation et les surfaces libres.

4.1 DISCRÉTISATION DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

4.1.1 DISCRÉTISATION ET ÉQUATIONS MATRICIELLES

Le potentiel de vitesse qui permet de décrire le champ de vitesse par la satisfaction de l'équation de Laplace sur le domaine de calcul est ici approximé par une interpolation polynomiale en terme de ses valeurs aux nœuds de calcul et de fonctions d'interpolation N_i . Cette approximation est utilisée à la fois pour le potentiel de vitesse et pour les fonctions de pondération qui sont introduites dans la formulation intégrale des équations de l'écoulement selon la méthode des résidus pondérés. Le potentiel ϕ et les fonctions de pondération ϕ^* sont donnés par:

$$\phi(\mathbf{x}) = \langle N_i(\mathbf{x}) \rangle \{ \phi_i \} \quad (4.1)$$

$$\phi^*(\mathbf{x}) = \langle N_i(\mathbf{x}) \rangle \{ \phi_i^* \} \quad (4.2)$$

où ϕ_i , ϕ_i^* sont respectivement les valeurs aux nœuds du potentiel de vitesse et de la fonction-test et N_i représente les fonctions d'interpolation. \mathbf{x} représente les coordonnées des points du domaine de calcul.

Pour introduire l'approximation de ϕ dans les équations du mouvement, celles-ci sont d'abord transposées sous une forme intégrale. Cela se fait par la méthode des résidus pondérés, en utilisant des fonctions de pondération, ou fonctions-test, que nous notons ϕ^* . Dans le calcul fait ici, ces fonctions sont de types Galerkin, elles sont assimilées à des variations des variables de calcul (le potentiel de vitesse).

L'intégration de la version différentielle des équations du milieu sur le domaine considéré V , pondérées par les fonctions ϕ^* donne:

$$\int_V \phi^* \Delta \phi dV = 0 \quad (4.3)$$

Notons que V est ici une surface, puisque nous traitons ici, rappelons-le, un problème 2D.

La forme intégrale dite faible est ensuite recherchée, dans le but de réduire les contraintes de dérivabilité de ϕ et faciliter le traitement des conditions aux frontières. Elle est obtenue de l'intégration par parties de l'équation précédente (ou de l'application à celle-ci du théorème de Green).

Cela donne :

$$\int_V (\nabla \phi^* \cdot \nabla \phi) dV = \int_S \phi^* (\nabla \phi \cdot \mathbf{n}) dS = \int_S \phi^* v_n dS \quad (4.4)$$

où S est le contour du domaine et \mathbf{n} est la normale extérieure à ce contour.

Les équations peuvent alors être exprimées sous forme matricielle en introduisant les expressions approximatives du potentiel de vitesse et des fonctions-test dans les équations intégrales.

Ainsi, lorsqu'on introduit dans l'équation précédente, l'équation 4.2, de même que :

$$\nabla \phi = \langle N_{i,x} \rangle \{ \phi_i \} \quad (4.5)$$

et :

$$\nabla \phi^* = \langle N_{i,x} \rangle \{ \phi_i^* \} \quad (4.6)$$

celle-ci devient :

$$\int_V \langle \langle N_{i,x} \rangle \{ \phi_i^* \} \cdot \langle N_{i,x} \rangle \{ \phi_j \} \rangle dV = \int_S \langle \phi_i^* \rangle \{ N_i \} v_n dS \quad (4.7)$$

soit

$$\int_V \langle \phi_i^* \rangle \{ N_{i,x} \} \langle N_{i,x} \rangle \{ \phi_j \} dV = \int_S \langle \phi_i^* \rangle \{ N_i \} v_n dS \quad (4.8)$$

Les vecteurs de valeurs aux nœuds de ϕ_i et ϕ_i^* , étant indépendants des variables d'intégration, peuvent être extraits de l'intégrale :

$$\langle \phi_i^* \rangle \left(\int_V \{ N_{i,x} \} \langle N_{i,x} \rangle dV \right) \{ \phi_j \} = \langle \phi_i^* \rangle \int_S \{ N_i \} v_n dS \quad (4.9)$$

Après avoir éliminé les valeurs aux nœuds des fonctions de pondération ϕ_i^* , on obtient la forme matricielle des équations du système :

$$[K_{ij}] \{ \phi_j \} = \{ F_i \} \quad (4.10)$$

où :

$$[K_{ij}] = \int_V \{ N_{i,x} \} \langle N_{i,x} \rangle dV \quad (4.11)$$

et :

$$\{ F_i \} = \int_S \{ N_i \} v_n dS \quad (4.12)$$

Le domaine de calcul est ensuite partitionné en éléments. Les intégrales précédentes peuvent alors être exprimées comme étant la somme des intégrales sur chacun des éléments, soit :

$$\int_{V^e} \{N_{i,x}\} \langle N_{i,x} \rangle dV = \sum_e \int_{V^e} \{N_{i,x}\} \langle N_{i,x} \rangle dV^e \quad (4.13)$$

et :

$$\int_S \{N_i\} v_n dS = \sum_e \int_{S^e} \{N_i\} v_n dS^e \quad (4.14)$$

où V^e et S^e sont respectivement la surface d'un élément et le côté d'un élément qui coïncide avec la frontière du domaine de calcul.

Pour chaque type d'élément du domaine de calcul sont définis des éléments de référence dans un espace de coordonnées ξ . Ce système de référence est relié aux coordonnées \mathbf{x} par la transformation géométrique :

$$\mathbf{x}(\xi) = \langle \bar{N}_i(\xi) \rangle \{ \mathbf{x}_i \} \quad (4.15)$$

L'approximation nodale du potentiel de vitesse ϕ et des fonctions de pondération sur l'élément de référence sont, quant à elles:

$$\phi(\xi) = \langle N_i(\xi) \rangle \{ \phi_i \} \quad (4.16)$$

$$\phi^*(\xi) = \langle N_i(\xi) \rangle \{ \phi_i^* \} \quad (4.17)$$

Les éléments utilisés dans ce travail étant tous isoparamétriques, dans tous les cas, les fonctions d'interpolation N_i et les fonctions de transformation géométriques \bar{N}_i sont identiques :

$$N_i(\xi) \equiv \bar{N}_i(\xi) \quad (4.18)$$

La transformation géométrique et l'approximation sur l'élément sont appliquées aux intégrales (4.13) et (4.14), pour obtenir des intégrales définies entièrement sur l'élément de référence. Ceci se fait en introduisant également le Jacobien \mathbf{J} de la transformation de coordonnées, défini par :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

On obtient, en nommant k_{ij} la matrice résultant de l'intégrale sur un élément:

$$[k_{ij}] = \int_{V^e} \{N_{i,x}\} \{N_{j,x}\} dV^e = \int_{S_m^e} [B]^T [B] \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (4.20)$$

où

$$[B] = J^{-1} [N_{i,\xi}] \quad (4.21)$$

et en nommant f_i le vecteur résultant de l'intégrale sur le contour associé à un élément:

$$\{f_i\} = \int_{S^e} \{N_i\} v_n dS^e = \int_{S_m^e} \{N_i(\xi)\} v_n J_s ds \quad (4.22)$$

s correspond ici au déplacement le long du côté de l'élément qui coïncide avec le contour du domaine. J_s est donné par :

$$J_s = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} \quad (4.23)$$

Avec ces différentes définitions, on obtient donc les équations élémentaires sous la forme :

$$[k_{ij}] \{\phi_i\} = \{f_i\} \quad (4.24)$$

Les équations élémentaires sont ensuite additionnées pour donner le système d'équations global qui prend la forme vue précédemment:

$$[K_{ij}]\{\phi_i\} = \{F_i\} \quad (4.25)$$

où K_{ij} et F_j sont le résultat de l'assemblage de toutes les matrices élémentaires k_{ij} et f_i .

Ce système d'équations subira quelques ajustements en fonction du traitement des conditions aux limites, notamment les conditions sur les discontinuités de circulation. Dans ce cas, en effet, des éléments supplémentaires sont ajoutés au système discrétisé, et des termes additionnels apparaîtront dans les équations matricielles. Nous réservons cette discussion pour la section 4.2.

Les éléments utilisés dans le maillage des domaines des calculs effectués dans ce travail sont le quadrilatère à 8 nœuds et le triangle à 6 nœuds, qui sont tous deux des éléments isoparamétriques. La géométrie de l'élément de référence et les fonctions d'approximation de ces deux éléments sont montrées aux figures 4.1 et 4.2.

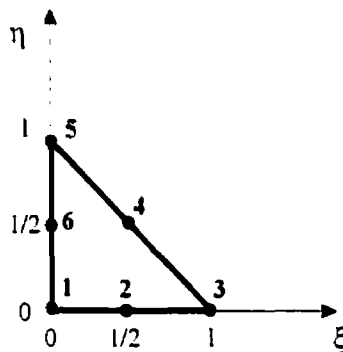


Figure 4.1 : Élément triangulaire à 6 nœuds

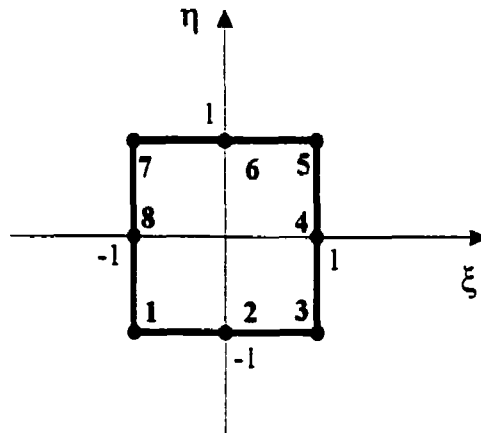


Figure 4.2 : Élément rectangulaire à 8 nœuds

4.1.2 ÉLÉMENTS DE VITESSE IMPOSÉE

L'imposition d'une vitesse à la sortie du domaine de calcul nécessite de calculer la contribution de chaque nœud au vecteur-force de l'équation matricielle élémentaire (équation 4.22). Pour des éléments simples, l'intégration sur le contour du terme correspondant peut être faite analytiquement. Une méthode plus générale consiste à calculer les contributions par le biais d'un élément de frontière, qui calcule chaque partie de l'équation matricielle élémentaire et fait l'intégration numérique générale par la méthode de Gauss. Cet élément sera un élément quadratique à trois nœuds.

L'équation discrétisée du terme de contour devient, après avoir fait l'approximation de l'intégrale par la méthode de Gauss:

$$\{f_i\} = \int_0^1 \{N_i(\xi)\} v_n J_s ds = \sum_{i_g} w_{i_g} \{N_i(\xi_{i_g})\} v_n J_s = J_s \sum_{i_g} w_{i_g} \{N_i(\xi_{i_g})\} v_n, \quad (4.26)$$

où : w_{i_g} sont ici les poids d'intégration,
 x_{i_g} les coordonnées élémentaires des points de Gauss et
l'indice i_g désigne les points de Gauss.

Dans le cas des parois fixes, v_n est nul et on a donc:

$$\{f_i\} = 0 \quad (4.27)$$

Dans le cas des éléments de sortie, le terme v_n est constant le long de S , et peut être extrait de la sommation. On a alors:

$$\{f_i\} = \int_0^1 \{N_i(\xi)\} v_n J_s ds = v_n J_s \sum_i w_i \{N_i(\xi_i)\} \quad (4.28)$$

L'élément de référence de ces éléments de conditions aux limites est montré à la figure 4.3.

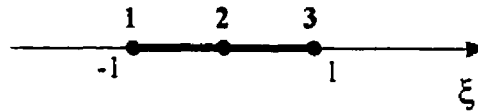


Figure 4.3 : Élément de surface à 3 nœuds

4.1.3 ÉLÉMENTS DE PAROIS MOBILES

Dans le cas d'éléments de parois mobiles, la vitesse n'est pas constante le long de S , et l'intégration numérique doit être faite en fonction de la valeur de v_n .

Nous avons vu dans la section 3.1.4 que, le long d'une paroi en mouvement, la condition aux limites est déterminée par la vitesse de rotation du rotor et par la géométrie des aubes. Soit:

$$v_n = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \omega(xn_y - yn_x) \quad (4.29)$$

où: ω est la vitesse de rotation,

x et y , les coordonnées cartésiennes et

n_x et n_y , les composantes de la normale extérieure à la paroi.

L'élément qui calcule le vecteur-force pour les parois mobiles doit donc calculer les coordonnées du nœud et la normale à la paroi à ce nœud. Puisque l'élément est situé sur le contour

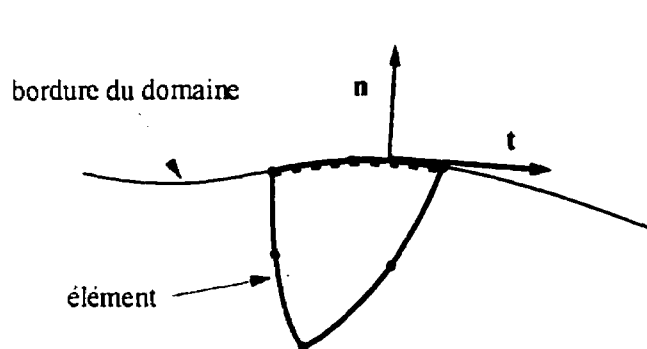


Figure 4.4 : Tangente à la paroi

du domaine, la normale à la paroi est aussi la normale à l'élément (voir figure 4.4). La normale à la paroi peut donc être calculée à l'aide de l'équation de la courbe décrivant l'élément dans l'espace. Celle-ci est en fait donnée par la transformation géométrique de l'élément. Il restera ensuite à assurer que ces deux normales sont définies selon la même

orientation dans l'espace, soit vers l'extérieur de la paroi. Comme la normale à l'élément est calculée dans un sens donné sur l'élément de référence, pour obtenir le sens approprié de la normale à la paroi, il faut définir adéquatement l'élément dans le modèle géométrique.

La normale est calculée à partir de la tangente à la courbe que forme dans l'espace le côté de l'élément. Cette dernière est obtenue de la dérivée de la courbe par rapport à un paramètre de la

courbe. Dans le cas où le côté de l'élément est situé selon un des axes du système de coordonnées de l'élément, on aura :

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \langle N_{i,\xi} \rangle \{ \mathbf{x}_i \} \quad (4.30)$$

où les coordonnées des points de la courbe, \mathbf{x} , sont exprimées sous forme discrète à l'aide des fonctions de transformation géométrique. Dans le cas, comme ici, où les éléments sont isoparamétriques, celles-ci correspondent aux fonctions d'interpolation N_i .

La normale est alors déduite à partir de la condition de perpendicularité:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (4.31)$$

Ce qui donne, pour la normale unitaire, en coordonnées cartésiennes:

$$\mathbf{n} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{t_v}{t_r}\right)^2 + 1}} \begin{pmatrix} -\frac{t_v}{t_r} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Pour un élément qui partage un côté avec le contour du domaine, le vecteur f_i aura donc la forme:

$$\{f_i\} = \int_0^1 \{N_i(\xi)\} \omega(xn_r, -yn_r) J, ds \quad (4.33)$$

où :

$$n_x = \frac{t_v}{\sqrt{\left(\frac{t_v}{t_r}\right)^2 + 1}} \quad \text{et} \quad n_y = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{t_v}{t_r}\right)^2 + 1}} \quad (4.34)$$

avec :

$$t_x = \langle N_{i,x} \rangle \{x_i\} \quad \text{et} \quad t_y = \langle N_{i,y} \rangle \{y_i\} \quad (4.35)$$

et :

$$x = \langle N_i \rangle \{x_i\} \quad \text{et} \quad y = \langle N_i \rangle \{y_i\} \quad (4.36)$$

Cette intégrale est, elle aussi, résolue par la méthode de Gauss, comme dans le cas précédent.

4.1.4 RÉOLUTION NUMÉRIQUE GLOBALE

Le système d'équations matriciel résultant de la discrétisation des équations du milieu fluide est un système linéaire. Nous allons maintenant voir comment ce système d'équations sera résolu.

La résolution de ce système d'équations sera faite par une méthode directe: l'élimination de Gauss. La résolution comprend deux étapes:

- triangularisation: réduction de la matrice à une matrice triangulaire par un processus de décomposition
- résolution du système de matrices triangulaires

L'algorithme de décomposition résulte en une matrice triangulaire supérieure et une matrice triangulaire inférieure.

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{L}][\mathbf{S}] \quad (4.37)$$

Avec \mathbf{K} : la matrice rigidité, \mathbf{L} une matrice triangulaire dont les termes du triangle supérieur sont nuls et les termes diagonaux unitaires, et \mathbf{S} , une matrice triangulaire dont les termes du triangle inférieur sont nuls.

Le système d'équations à résoudre devient alors:

$$[\mathbf{L}][\mathbf{S}]\{\phi\} = \{\mathbf{F}\} \quad (4.38)$$

Les systèmes matriciels inférieur et supérieur sont alors successivement résolus:

$$[\mathbf{L}]\{\mathbf{F}'\} = \{\mathbf{F}\} \quad (4.39)$$

$$[\mathbf{S}]\{\phi\} = \{\mathbf{F}'\} \quad (4.40)$$

Cet algorithme de résolution est ajusté pour tenir compte du stockage des éléments de la matrice par la méthode de ligne de ciel.

Cette procédure permet d'obtenir la valeur du potentiel de vitesse aux nœuds. Une fois le potentiel de vitesse obtenu, il reste à calculer la vitesse. Ce calcul de la vitesse consiste à évaluer le gradient du potentiel aux nœuds. La difficulté rencontrée ici est que la discontinuité du gradient du potentiel entre les éléments fait en sorte que chaque élément donne une valeur différente de la vitesse à chaque nœud. Le calcul se fait en deux étapes. D'abord, la vitesse à un nœud est calculée à partir des valeurs de ϕ aux nœuds d'un même élément. ensuite la moyenne des contributions des divers éléments à un même nœud est faite. Cette moyenne tient compte de la surface de chaque élément.

4.2 TRAITEMENT DES DISCONTINUITÉS DE CIRCULATION

4.2.1 MODIFICATION DE L'ÉQUATION MATRICIELLE

Comme il a été dit à la section 3.2, pour assurer le traitement correct de l'écoulement autour des corps asymétriques, il faut arriver à générer dans le champ de vitesse la quantité appropriée de circulation qui satisfasse la condition de Kutta-Joukowski. Il faut pour cela une procédure qui permette d'imposer à la solution de l'équation de Laplace un écart prédéfini de la valeur du potentiel de vitesse de part et d'autre des discontinuités créées dans le domaine à partir de ces corps. La procédure doit aussi permettre de calculer la valeur adéquate de ce saut, qui est inconnue au départ.

Dans le modèle éléments finis utilisé ici, cette procédure consiste à imposer une condition aux limites particulière aux nœuds situés sur les discontinuités. La condition aux limites qu'il s'agit d'imposer ici est une valeur fixe de la différence de potentiel entre chaque paire de nœuds situés de chaque côté des discontinuités. La valeur de cette différence est, quant à elle, déterminée itérativement d'après la configuration du champ de vitesse. Pour chaque point de calcul du domaine discrétisé, cette condition peut s'écrire :

$$\Delta\phi = \phi^+ - \phi^- = \Gamma \quad (4.41)$$

où ϕ^+ et ϕ^- sont les valeurs du potentiel de vitesse à deux nœuds situés de part et d'autre d'une discontinuité du domaine.

Pour obtenir la valeur désirée de $\Delta\phi$ entre les deux nœuds, on relie ceux-ci par des éléments linéaires à deux nœuds. Les propriétés de cet élément feront en sorte que quelle que soient les valeurs données à ϕ au cours de la résolution du système d'équations matricielles, l'écart de ϕ entre les deux nœuds de l'élément restera égal à la valeur prescrite.

Ce sont en fait des éléments de type "ressorts", auxquels on confère une très grande rigidité (figure 4.5). Ils agissent comme des ressorts, du fait que le potentiel ϕ joue le rôle du

déplacement. La grande rigidité de cet élément ressort communique à un nœud toute variation de ϕ qui survient à l'autre nœud.



Figure 4.5 : Élément ressort

Ces éléments résolvent l'équation:

$$k(\phi_1 - \phi_2) = f \quad (4.42)$$

où ϕ joue le rôle de la position des extrémités du ressort, k , le rôle de la rigidité et f , celui de la force appliquée. Lorsqu'on remplace la force appliquée par un saut de potentiel imposé, on a:

$$k(\phi_1 - \phi_2) = k\Delta\phi \quad (4.43)$$

Sous forme matricielle, en explicitant les valeurs du vecteur force aux nœuds des extrémités du ressort, cela donne l'équation élémentaire:

$$k \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{vmatrix} = k\Delta\phi \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (4.44)$$

$\Delta\phi$ représente toujours, dans cette application des éléments-ressort, le saut de potentiel à travers la discontinuité issue du bord de fuite. Cette valeur, égale à la circulation de la vitesse sur le contour du corps générateur de circulation, est déterminée itérativement. On arrive à faire converger le processus vers la valeur adéquate de $\Delta\phi$ en utilisant comme critère de convergence la

condition de Kutta-Joukowski, qui veut que la pression (ou la grandeur de la vitesse) soit égale de part et d'autre du bord de fuite.

C'est donc la forme ci-dessus que prend l'équation élémentaire d'un élément ressort reliant deux nœuds sur lesquels s'applique la condition de Kutta-Joukowski.

Une fois effectuée la sommation des contributions de tous les éléments, le système algébrique global modifié par les éléments-ressorts, aura la forme:

$$\begin{vmatrix} K_{ii} + k & K_{ij} - k \\ K_{ji} - k & K_{jj} + k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_i - k\Delta\phi_{ij} \\ f_j + k\Delta\phi_{ij} \end{vmatrix} \quad (4.45)$$

où les termes K_{ij} proviennent des éléments de l'ensemble du domaine.

Lorsqu'on isole les contributions des ressorts, on trouve:

$$\mathbf{K}\Phi + k \begin{vmatrix} (\phi_i - \phi_j) - \Delta\phi_{ij} \\ (\phi_j - \phi_i) + \Delta\phi_{ij} \end{vmatrix} = \mathbf{F} \quad (4.46)$$

Le système est donc pénalisé en termes du saut de potentiel et k est un facteur de pénalité. Si on impose une très grande valeur à k , on assure, pour qu'il y ait une solution, que:

$$(\phi_i - \phi_j) \approx \Delta\phi_{ij} \quad (4.47)$$

i. e., que le saut de potentiel imposé soit respecté.

4.2.2 SCHÉMAS DE CALCUL

Une fois posées les modifications au système d'équations permettant d'imposer une circulation à l'écoulement, il reste à développer une méthode menant à la détermination de la valeur appropriée de la circulation à imposer. Dans cette section, nous exposerons la méthode utilisée ici.

Cette méthode consiste à suivre un processus itératif dans lequel l'écoulement est successivement calculé pour différents sauts de potentiel imposés à la discontinuité, jusqu'à obtention de la satisfaction de la condition de Kutta-Joukowski. Celle-ci est vérifiée par l'égalité de la grandeur de la vitesse, ou de la pression, de part et d'autre de la discontinuité, au bord de fuite. (La grandeur de la vitesse ou la pression peuvent être utilisé indifféremment, puisque, d'après l'équation de Bernoulli, telle qu'elle s'applique ici, la pression sera proportionnelle au carré de la vitesse.) À chaque pas, la nouvelle valeur du saut de potentiel qui sera imposé au pas suivant est calculée à partir de l'écart de la grandeur de la vitesse aux deux nœuds situés à l'origine de la discontinuité et représentant le bord de fuite. Cette nouvelle valeur est obtenue par interpolation linéaire, avec:

$$\frac{\Delta\phi_{i+1} - \Delta\phi_i}{\Delta p_{i+1} - \Delta p_i} = \frac{\Delta\phi_i - \Delta\phi_{i-1}}{\Delta p_i - \Delta p_{i-1}} \quad (4.48)$$

$$\Delta\phi_{i+1} = \Delta\phi_i - \Delta p_i \left(\frac{\Delta\phi_i - \Delta\phi_{i-1}}{\Delta p_i - \Delta p_{i-1}} \right) \quad (4.49)$$

La convergence est vérifiée lorsque la différence de la grandeur de la vitesse aux deux nœuds du bord de fuite, à l'origine de la discontinuité, devient moindre qu'une valeur préétablie.

Chaque corps asymétrique immergé génère une discontinuité. Chacune d'elle est traitée indépendamment, et la convergence est atteinte lorsque toutes les discontinuités sont résolues.

4.3 TRAITEMENT DES SURFACES LIBRES

4.3.1 STRATÉGIE DE CALCUL

La procédure servant à déterminer la position de la surface libre consiste à déplacer chaque nœud en fonction de l'écart entre la grandeur de la vitesse à ce nœud et une valeur anticipée de la vitesse qu'aura la surface libre dans l'écoulement réel.

Dans ce travail, cette valeur anticipée de la vitesse de la surface libre est approximée, à chaque pas de l'itération, à l'aide de l'équation de Bernoulli, en fonction des conditions au premier nœud de la surface libre, à la sortie de la conduite. La vitesse à chaque nœud étant obtenue de la solution de l'écoulement à chaque pas, la grandeur du déplacement de chaque nœud est calculée en fonction de l'écart entre la vitesse anticipée et la vitesse au nœud selon un principe de conservation du débit.

Deux auteurs ayant utilisé des méthodes semblables à celle qui a été adoptée ici ont été consultés.

Chan et Larock, en 1973 [47], ont utilisé une approche similaire pour calculer l'écoulement dans des vannes de barrages hydroélectriques. Ils faisaient, comme ici, un calcul par éléments finis de l'écoulement potentiel 2D indépendant de la détermination de la position de la surface libre. Celle-ci était considérée perméable et le potentiel de vitesse ϕ y était imposé. La surface libre était déplacée itérativement en fonction de la vitesse à chacun de ses nœuds, de façon à ce que la surface soit parallèle à la direction de la vitesse à chaque nœud. L'objectif étant de faire de la surface libre une ligne de courant. Ils ont testé leur méthode sur des jets issus d'orifices. Le même test a été utilisé ici.

L'approche de Sarpkaya et Hiriart, qui publiaient en 1975 [50] un exemple de calcul de jets frappant des déflecteurs, a cependant été privilégiée ici. Ils ont procédé de la même façon que Chan et Larock, sauf que, dans ce cas, la surface libre approximée était une surface imperméable. Ils utilisaient pour calculer le déplacement à un nœud, non pas la vitesse au nœud précédent, mais une seule vitesse obtenue des conditions au début de la surface libre et de l'application de

l'équation de Bernoulli. La vitesse obtenue servait ensuite à déplacer tous les nœuds de la surface libre. L'effet de la gravité étant négligé, la vitesse devenait alors constante le long de la surface libre.

La procédure servant à déterminer la position de la surface libre consiste à déplacer chaque nœud en fonction de l'écart entre la grandeur de la vitesse à ce nœud et une valeur anticipée de la vitesse qu'aura la surface libre dans l'écoulement réel.

Un programme a été mis sur pied, qui calcule ainsi la position de la surface libre. Les différentes étapes de mise en œuvre sont décrites ici. On discute en détail du calcul du déplacement à chaque itération, des difficultés qu'amène le déplacement du maillage, des conditions d'une bonne approximation de la vitesse de surface libre, et du lissage de la courbe obtenue.

4.3.2 CALCUL DU DÉPLACEMENT

Plusieurs schémas peuvent être adoptés pour calculer une valeur de déplacement d'un nœud de la surface libre à partir de l'écart entre la vitesse à ce nœud et la vitesse de la surface libre. Le déplacement peut être calculé en fonction de la vitesse au début de la surface libre ou de la vitesse au nœud précédent. C'est le premier choix qui a été retenu ici. Pour accélérer la convergence, on peut utiliser l'écart entre les carrés ou les cubes des vitesses, comme le proposent Sarpkaya et Hiriart [50]. L'instabilité est cependant plus grande. Des tests ont été faits pour plusieurs de ces schémas de calcul.

On peut aussi modifier la méthode de calcul du déplacement au fur et à mesure de l'avancement du calcul. Cette approche n'a pas été explorée ici.

Dans le présent travail, le calcul du déplacement se fait à partir d'une équation de continuité, appliquée à la section d'écoulement du jet. Le déplacement du nœud est associé à la différence de vitesse de manière à conserver un même débit dans la section d'écoulement. Comme on l'a vu à la section 3.3, cela donne, pour le déplacement à chaque nœud de la surface libre :

$$d_i = L \left[\left(\frac{v_i}{v_{s,i}} \right) - 1 \right] \quad (4.50)$$

- où $v_{s,i}$ est la vitesse calculée par l'équation de Bernoulli pour un nœud,
 v_i est la vitesse calculée par l'équation de Laplace pour le même nœud,
 d_i est le déplacement de la surface libre à ce nœud et
 L est une grandeur reliée aux dimensions du jet.

Il est utile aussi, tel que l'ont montré Sarpkaya et Hiriart [50], d'appliquer un exposant α au rapport des vitesses. C'est un autre moyen d'accélérer la convergence du processus :

$$d_i = L \left[\left(\frac{v_i}{v_{s,i}} \right)^\alpha - 1 \right] \quad (4.51)$$

Le déplacement ainsi calculé, une valeur scalaire, est la grandeur du déplacement. Sa direction est considérée comme étant perpendiculaire au jet et dirigé vers l'extérieur du jet. La normale au jet doit donc aussi être calculée, pour chaque nœud de la surface libre, dans le programme de calcul de la position de la surface libre, pour avoir un déplacement sous forme vectorielle. On l'obtient de la perpendiculaire à la vitesse au nœud.

4.3.3 CONTRAINTES LIÉES À LA DÉFORMATION DU MAILLAGE

Une des tâches les plus ardues du calcul, et un facteur qui réduit l'efficacité de cette méthode de calculer les écoulements dans les turbines Banki, est la nécessité d'éviter des déformations exagérées du maillage au sein d'une géométrie déjà complexe. Lorsque, par exemple, la surface libre rencontre la paroi d'une aube, une modification majeure doit être apportée au maillage.

Pour éviter ces déformations excessives, on impose des directions au déplacement des nœuds de la surface libre. Cela se fait en multipliant le vecteur déplacement par une matrice:

$$\mathbf{d} = \begin{vmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{yx} & d_{yy} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_x \\ d_y \end{vmatrix} \quad (4.52)$$

Le résultat de cette opération sera tel qu'il annule le déplacement dans une direction, tout en le préservant dans la direction perpendiculaire.

4.3.4 APPROXIMATION DE LA VITESSE EN DÉBUT DE SURFACE LIBRE

Une autre difficulté majeure du calcul itératif est la détermination d'une bonne approximation de la vitesse de la surface libre au début du calcul. Une valeur erronée de cette vitesse fera en sorte que la surface libre sera déplacée loin de sa position réelle. Le jet sera alors beaucoup trop mince ou beaucoup trop large, faussant complètement les vitesses obtenues lors du prochain calcul de l'écoulement.

L'obtention d'une bonne approximation de la vitesse de la surface libre demande le respect de conditions de sortie lisses au début du jet, à la sortie de la tuyère. D'une part, la position initiale donnée à la surface libre doit être tangente à l'extrémité de la paroi de la conduite, de manière à ce qu'il n'y ait pas de "coin" dans le domaine de calcul. Un tel cas fausserait la valeur de la vitesse de la surface libre et rendrait impossible le calcul. Un coin concave créerait une zone de stagnation et donnerait une vitesse presque nulle, alors qu'un coin convexe engendrerait des vitesses exagérément grandes. D'autre part, plus l'orientation de la paroi sera différente de celle du jet, plus le calcul sera difficile, en raison des forts gradients de vitesse présents près du bord, puisque le fluide doit changer de direction abruptement. Le maillage doit être plus serré à cet endroit, et le lissage de la courbe est plus difficile, puisqu'il engendre des oscillations en aval.

Pour débiter le calcul itératif de la position des surfaces libres, il faut par ailleurs déterminer une position initiale. L'approximation initiale des surfaces libres se fait sur la base de courbes B-spline. Celles-ci sont construites avec trois points de contrôle. Les points de contrôle sont déterminés de telle façon à imposer que l'angle au début de la surface libre soit parallèle à celui de la paroi.

4.3.5 CONDITION À LA SORTIE DU JET

Pour éviter que les conditions à la sortie cessent d'être uniformes au cours du calcul, il faut veiller à ce que la surface soit déplacée perpendiculairement au jet. Cela est cependant une mesure accessoire lorsque l'extrémité du jet est éloignée de toute perturbation du champ de vitesse.

4.3.6 LISSAGE DE LA SURFACE LIBRE

Pour éviter la divergence du calcul après un certain nombre d'itérations, du fait de l'accumulation des erreurs, on procède au lissage de la courbe à chaque pas. L'approximation utilisée ici est une courbe B-spline avec un peu moins de points que le nombre de nœuds de la surface libre.

5 TRAITEMENT INFORMATIQUE

L'aspect informatique occupe une large place dans ce travail, puisque la manipulation des données a été largement automatisée. Dans cette section, nous allons décrire les données impliquées dans la mise en œuvre du calcul, de même que les différents traitements qui sont effectués tout au long du calcul. Cela va de la génération des données, au calcul en tant que tel et à la visualisation des résultats.

5.1 DONNÉES

Les données sont divisées en quatre groupes, en fonction des différentes phases du calcul:

- les données géométriques
- les données du calcul par éléments finis
- les résultats du calcul par éléments finis qui servent de données au calcul de la position de la surface libre
- le résultat final du calcul

5.1.1 DONNÉES GÉOMÉTRIQUES

Les données géométriques sont divisées en deux groupes. D'une part, les coordonnées des points, les courbes dans l'espace et les surfaces qui forment le domaine de calcul et qui seront partagées en éléments finis. Et, d'autre part, les coordonnées des nœuds, les connectivités des éléments, les conditions aux limites et les différents paramètres qui constituent la discrétisation du domaine de calcul et les données du calcul de résolution des équations de l'écoulement. Cet ensemble de données peut être réduit en fait à un nombre plus restreint puisque les données sont générées de façon automatique, et ceci de deux façons.

D'une part, la division de la surface du domaine en éléments finis peut se faire en partant d'une forme simple, triangulaire ou rectangulaire, et du nombre d'éléments en contact avec chaque côté de cette surface. Comme nous le verrons plus loin, un algorithme permet ensuite de générer automatiquement les éléments qui subdivisent cette surface.

D'autre part, pour en arriver à construire puis à réduire à ces formes simples le domaine de calcul de forme complexe qu'est l'intérieur d'une turbine Banki, il faut générer un ensemble de courbes et de surfaces dans l'espace. Cette subdivision du domaine doit aussi pouvoir être répétée à plusieurs reprises, dans le cadre d'un calcul itératif.

C'est l'utilisation d'une application de CAO (Conception Assistée par Ordinateur) qui permet ces deux constructions. L'ensemble de la géométrie du problème peut alors se réduire à une série de commandes du progiciel, qui génèrent les données de façon automatique, à chaque itération.

Ces données géométriques ont été générées ici, en majeure partie, par l'application Patran. Ceci a permis d'utiliser les commandes graphiques du logiciel pour générer à la fois le dessin du domaine physique, sur lequel le calcul se fera, et le maillage éléments finis. Il permet par ailleurs d'utiliser son interface pour exporter les données dans des fichiers textes. Ce format permet à la fois d'être facilement utilisé par d'autres applications et d'être inspecté visuellement.

5.1.2 DONNÉES DU CALCUL PAR ÉLÉMENTS FINIS

Les données pour le calcul éléments finis sont contenues dans des fichiers ASCII. Ils contiennent les données et les paramètres pour permettre un calcul par l'application MEF.

Ils sont constitués plus précisément des coordonnées des nœuds, des connectivités des éléments ainsi que des paramètres de calcul, notamment des paramètres qui contrôlent la détermination par un processus itératif de la circulation de l'écoulement.

Plusieurs autres données apparaissent en cours de calcul: les valeurs successives des matrices élémentaires et globales de rigidité et de sollicitation, les tables des coordonnées des points d'intégration et des coefficients de Gauss, etc.

Pour optimiser l'utilisation de la mémoire de l'ordinateur, ces données sont regroupées dans une seule table de taille variable à laquelle est joint un index des différentes sections de cette table.

Dans la version de MEF utilisée ici, les données sont des valeurs à 4 chiffres significatifs, alors que les données de Patran sont des valeurs à 9 chiffres significatifs. Ce choix a été imposé du fait que la version de MEF qui était disponible en début de projet avait ce niveau de précision. Elle n'a pas été changée dans la suite des choses.

5.1.3 RÉSULTATS DU CALCUL PAR ÉLÉMENTS FINIS

Les résultats de MEF sont aussi contenus dans des fichiers ASCII, qui peuvent ainsi être interprétés et subir des traitements par différents programmes. Ils sont constitués des valeurs de potentiel et de vitesse aux nœuds et aux points de Gauss des éléments et des résidus.

Un sous-groupe de ces données est utilisé pour calculer la position de la surface libre. Il s'agit des coordonnées des nœuds situés sur la surface libre et des vitesses en ces points. À ces données s'ajoutent différents paramètres utilisés durant le calcul pour en assurer et en accélérer la convergence.

5.1.4 RÉSULTATS DU CALCUL DE LA POSITION DE LA SURFACE LIBRE

Le résultat du calcul d'une nouvelle position de la surface libre est aussi un ensemble de fichiers textes, constitué principalement des nouvelles coordonnées de la surface libre, et du fichier de commandes graphiques de Patran qui servira, au prochain cycle de calcul, à générer le nouveau domaine de calcul et un nouveau maillage.

5.2 TRAITEMENTS EFFECTUÉS

5.2.1 VUE GÉNÉRALE

5.2.1.1 Exigences du calcul

Il est apparu nécessaire d'automatiser largement les calculs de l'écoulement dans la turbine Banki du fait que ces calculs se font de manière répétitive et qu'ils requièrent un grand nombre de données.

Par ailleurs, le calcul se fait à l'aide de deux progiciels : MEF et PATRAN. Pour cette raison, plusieurs étapes de conversion et d'extraction des données ont été nécessaires. Les données étant converties, à l'intérieur de fichiers de format texte, dans les formats de lecture des différents programmes.

Une série de programmes a donc été créée pour manipuler les données. Ces programmes sont décrits dans ce qui suit.

5.2.1.2 Algorithme général

Il y a trois principales tâches à accomplir dans le présent calcul : la génération du maillage, le calcul de l'écoulement et le calcul de la surface libre. Chaque itération du calcul accomplit ces tâches en suivant le processus global suivant:

- génération des données géométriques avec Patran
- conversion et extraction des données
- calcul de l'écoulement avec MEF
- extraction des données
- calcul de la surface libre
- visualisation

Voyons plus en détail cet algorithme du calcul. Tout ce processus est schématisé à la figure 5.1.

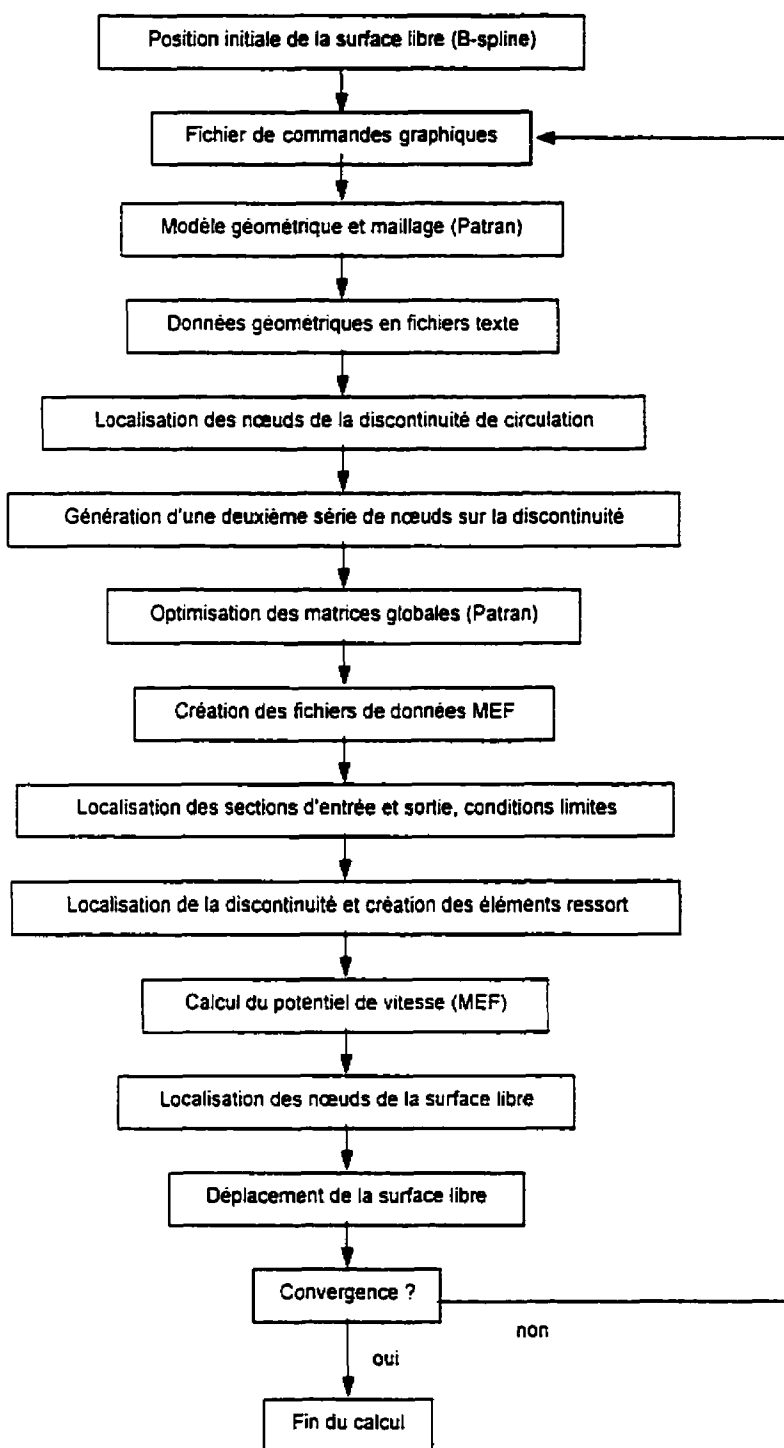


Figure 5.1: Algorithme global du calcul

1. D'abord, une position initiale de la surface libre est calculée avec une approximation par une courbe B-spline. Un programme génère alors, à partir de points de contrôle, les coordonnées des points de cette surface initiale.
2. La géométrie du domaine de calcul et sa discrétisation sont ensuite réalisées avec le logiciel Patran. Ceci se fait à l'aide d'un fichier de commande auquel on a joint les lignes de script produites à l'étape précédente. Ce même fichier sera d'ailleurs réutilisé à chaque nouvelle itération. L'utilisation d'un fichier de commandes réduit ainsi le nombre de données à introduire à chaque itération. Ces données se réduisent aux coordonnées des points de la surface libre. À chaque itération, les commandes qui créent les points de la surface libre sont remplacées dans le fichier de commande par les mêmes lignes de commande dans lesquelles seules les coordonnées des points ont été changées. Le résultat de la construction du domaine de calcul est ensuite exporté de la base de données de Patran vers un fichier ASCII, qui contient les coordonnées des nœuds et les connectivités.
3. La prochaine étape consiste à localiser les nœuds qui se situent sur les discontinuités de circulation, et à créer une nouvelle série de nœuds qui occuperont les mêmes coordonnées. Ces séries de nœuds dédoublés serviront à créer les éléments-ressorts. Cette étape consiste donc à créer de fait les discontinuités du domaine. Elle se fait par le biais d'un programme séparé parce qu'il n'y avait pas de façon simple de réaliser cette opération automatiquement dans Patran. La procédure suivie dans ce programme sera expliquée plus loin.
4. Les données sont ensuite réintroduites dans la base de données de Patran pour optimiser les matrices globales. Cela se fait en utilisant les algorithmes disponibles dans Patran. Les données sont ensuite réexportées vers un fichier texte qui contient toujours les coordonnées des nœuds et les connectivités.
5. Ces fichiers sont ensuite convertis pour créer le fichier des nœuds et le fichier des connectivités qui serviront au calcul éléments finis fait par MEF.
6. Pour compléter les données nécessaires au calcul éléments finis de MEF, il s'agit à ce stade d'ajouter les éléments de conditions aux limites et les paramètres du calcul. Les premiers sont

construits automatiquement en localisant les différentes portions du contour du domaine qui correspond à des conditions aux limites données. Les portions où se font l'entrée et la sortie du fluide sont localisées et donnent les nœuds où le potentiel est imposé et les éléments de vitesse imposée. Les nœuds du contour des aubes sont ensuite identifiés pour pouvoir construire les éléments de parois mobiles. Finalement les nœuds situés sur les discontinuités de circulation sont de nouveaux identifiés (notons que ce seront de nouveaux nœuds si l'optimisation des matrices s'est faite à partir des nœuds), et les éléments-ressorts sont établis et ajoutés au fichier des connectivités. Nous reviendrons sur les méthodes suivies pour réaliser ces différentes tâches.

7. La résolution du système d'équations décrivant l'écoulement dans la turbine peut maintenant être faite avec le logiciel MEF. Le principal résultat de ce calcul est la création des fichiers du potentiel et de la vitesse aux nœuds.
8. Ces deux fichiers, avec les fichiers des nœuds et des connectivités sont ensuite convertis en format binaire pour permettre la visualisation de l'écoulement.
9. La prochaine étape du calcul sera le calcul d'une nouvelle position de chaque surface libre. Ceci nécessitera de localiser préalablement les nœuds situés sur chacune des surfaces libres.
10. Finalement, le calcul d'une nouvelle position des surfaces libres est fait et la convergence du calcul est vérifiée.
11. La nouvelle position de la surface libre est représentée par les nouvelles coordonnées des nœuds qui la composent. Si une nouvelle itération est nécessaire, ceux-ci sont transcrits dans la série de lignes de commandes Patran qui servira à générer ces points dans une nouvelle construction du domaine. Ceci nous reporte alors à la seconde étape du calcul, à partir de laquelle le processus itératif se poursuivra jusqu'à la convergence du calcul.

Les principales étapes de ce processus seront maintenant décrites plus en détail.

5.2.2 GÉNÉRATION DU MODÈLE GÉOMÉTRIQUE

5.2.2.1 Géométrie initiale

La première étape de la génération du modèle géométrique consiste à calculer une première position de la surface libre à l'aide d'une approximation par B-spline. Le programme qui fait ce calcul utilise les coordonnées des trois points de contrôle qui lui sont fournis, ainsi que le nombre de points à calculer, et génère les coordonnées de ces points. Il construit ensuite la ligne de commande du script qui permettra de générer chacun de ces points dans Patran.

5.2.2.2 Utilisation du logiciel de CAO

Un fichier de commandes Patran est créé à partir des coordonnées des points donnant une position initiale aux surfaces libres, et avec l'ensemble des données définissant la géométrie de la turbine et le maillage du domaine de calcul. Lorsque exécuté, ce fichier de commandes créera la géométrie complète de la section de turbine modélisée, et fera la division du domaine de calcul en éléments finis. L'utilisation de fichiers de commande pour générer le maillage du domaine est un moyen simple de générer automatiquement le même domaine de calcul à chaque itération tout en faisant subir un déplacement à une portion somme toute restreinte de ce domaine. Le fichier de commande est composé des commandes qui définissent d'abord les contours réels du domaine, et ensuite les courbes qui permettront de définir les surfaces qui seront divisées en éléments.

La division d'une surface en éléments se fait automatiquement dans Patran à partir d'un algorithme utilisant le nombre d'éléments adjacents à chacun des côtés de la surface.

Cette génération automatique des données a pour conséquence de créer une toute nouvelle distribution des points de calcul dans le domaine. Cela a l'avantage d'uniformiser l'erreur d'approximation dans le calcul. Dans les approches précédentes (Sarpkaya/Hiriart [50]), seule une partie du maillage était modifiée à chaque itération. Il y avait alors nécessité de minimiser l'ampleur des travaux de maillage du domaine. Cela a perdu aujourd'hui sa raison d'être avec la disponibilité d'outils plus puissants de graphisme sur ordinateur.

L'utilisation d'un logiciel de CAO impose cependant des contraintes au niveau du calcul. Comme nous l'avons vu à la section 4.3, le calcul de la position de la surface libre fait appel à une procédure de lissage de courbe. La reconstruction de cette courbe dans Patran, et son maillage subséquent, amènent un nouveau lissage de la courbe. La surface libre subira donc en fait, à chaque pas de calcul trois lissages successifs.

Une fois les données géométriques créées par Patran, elles doivent être converties en un autre format pour subir les traitements qui mèneront en bout de ligne au calcul de l'écoulement. Cela se fait par le biais d'un programme qui crée deux fichiers : celui des coordonnées des nœuds, et celui des connectivités des éléments. Ces fichiers sont alors utilisés pour extraire les données nécessaires à la définition des éléments de conditions aux limites. C'est ce processus que nous expliquerons dans la section suivante.

5.2.3 EXTRACTION AUTOMATIQUE DES DONNÉES

Les données produites par Patran pour le calcul de MEF ne vont constituer que les éléments dans lesquels est subdivisée la surface du domaine de calcul. Un certain nombre de programmes sert ensuite à construire l'ensemble des autres données nécessaires au calcul éléments finis, soit principalement les données liées aux conditions aux limites.

5.2.3.1 Localisation des nœuds à l'entrée du domaine

Les nœuds de l'entrée peuvent être localisés grâce à la forme précise que prend la section d'entrée du fluide dans le domaine de calcul. Ils sont localisés sur la base de leur appartenance à la droite que constitue cette section d'entrée.

Les nœuds recherchés doivent satisfaire l'équation suivante, qui décrit la courbe dans l'espace bi-dimensionnel:

$$y - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 \right) \leq \varepsilon \quad (5.1)$$

Où x_1, y_1, x_2 et y_2 représentent les coordonnées des extrémités de la droite formant la section d'entrée, x et y les coordonnées d'un nœud quelconque et ε une valeur minimale servant de critère de proximité, établie en fonction des dimensions du domaine de calcul et de la finesse de la discrétisation. Cette valeur doit permettre d'exclure tout nœud n'appartenant pas à la droite, mais elle doit aussi tenir compte de l'imprécision intrinsèque de la machine de calcul. Elle est déterminée par essai et erreur, au moment du calcul.

Les numéros de nœuds ainsi obtenus serviront ensuite de données pour le calcul éléments finis.

5.2.3.2 Création des éléments de surface à la sortie

Les nœuds de la sortie sont, comme les nœuds de l'entrée, localisés sur la base du fait qu'ils appartiennent à une droite dans l'espace bi-dimensionnel.

Les nœuds recherchés doivent répondre au critère suivant:

$$y - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 \right) \leq \varepsilon \quad (5.2)$$

où x_1, y_1, x_2 et y_2 représentent les coordonnées des extrémités de la droite formant la section de sortie. x et y les coordonnées d'un nœud quelconque et ε une valeur minimale servant de critère de proximité, établie en fonction des dimensions du domaine de calcul et de la finesse de la discrétisation.

Une fois trouvés les nœuds de la sortie, il s'agit ensuite de s'en servir pour définir les éléments de vitesse imposée. Pour ce faire, les nœuds trouvés sont ordonnés d'après leur position, et chaque élément sera constitué d'une série de trois nœuds successifs. Le programme qui génère ces éléments doit aussi localiser les nœuds des discontinuités qui se trouvent sur la section de sortie de l'écoulement. Lorsque ces nœuds sont rencontrés, la séquence suivie pour construire les éléments de condition aux limites à trois nœuds est modifiée pour que les deux nœuds de la discontinuité se retrouvent sur deux éléments différents.

5.2.3.3 Création des éléments de surface aux parois mobiles

Pour pouvoir créer les éléments de conditions limites qui imposent la condition d'imperméabilité des parois mobiles, il faut d'abord pouvoir repérer les parois des aubes. Ceci se fait de la même façon que pour les autres frontières du domaine où les conditions limites sont non nulles. C'est-à-dire en trouvant les nœuds dont les coordonnées satisfont, à l'intérieur d'une certaine marge, l'équation de la courbe qui définit la paroi dans l'espace. Dans le cas de l'aube, la complexité additionnelle vient du fait que cette courbe n'est plus une simple droite, mais une série de courbes de formes diverses. Dans les calculs faits ici, ces courbes étaient des arcs de cercles, et

les programmes utilisent les coordonnées polaires attachées à chaque arc de cercle pour faire le traitement des nœuds.

De façon formelle, les nœuds recherchés doivent donc satisfaire le critère suivant:

$$y - f_a(x) \leq \varepsilon \quad (5.3)$$

où $f_a(x)$ représente l'ensemble des fonctions décrivant les courbes dans l'espace formant l'aube. Les variables x et y sont les coordonnées d'un nœud quelconque et ε , une valeur minimale servant de critère de proximité.

Les éléments de condition aux limites sont ensuite créés, mais cela se fait d'une façon un peu plus complexe que pour les éléments de la section de sortie. Ils sont construits en ordonnant les nœuds d'après leur position dans l'espace, et en définissant les éléments en suivant la séquence des nœuds, mais aussi en s'assurant que la normale à la paroi soit définie dans la bonne direction. La mise en ordre des nœuds dans l'espace se fait en traitant successivement les nœuds appartenant à chacune des courbes constituant l'aube. Il faut aussi éviter la répétition des nœuds qui appartiennent à deux courbes, et traiter correctement les nœuds de la discontinuité issue de l'aube.

5.2.3.4 Création des éléments ressorts

Les éléments-ressorts servant au calcul de la circulation sont générés automatiquement en deux étapes. Une série additionnelle de nœuds est d'abord générée, ensuite les connectivités entre ces nœuds sont établies, pour obtenir les éléments-ressorts.

Les discontinuités du domaine de calcul, qui sont introduites pour permettre le calcul de l'écoulement sur la base du potentiel de vitesse, apparaissent dès la construction de la géométrie du domaine de calcul. Il s'agit de créer des divisions dans la surface qui soient issues des corps submergés et qui s'étendent jusqu'à la frontière extérieure du domaine. Ces divisions de la surface se manifesteront dans le modèle discrétisé par des séries de nœuds superposés. Ces nœuds seront reliés entre eux pour former les éléments à deux nœuds qui imposeront le saut de potentiel. Dans les calculs faits ici, ces nœuds sont disposés le long de lignes droites non pas en raison de contraintes théoriques, mais simplement pour faciliter leur localisation automatique. Par ailleurs,

dans les calculs faits dans le cadre de ce travail, les discontinuités ont toutes été dessinées pour rencontrer la section de sortie de l'écoulement.

La localisation automatique des nœuds se fait en identifiant, parmi tous les nœuds du domaine, ceux qui satisfont le critère suivant:

$$y - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 \right) \leq \varepsilon \quad (5.4)$$

x_1 , y_1 , x_2 et y_2 représentent les coordonnées des extrémités de la droite formant la discontinuité, x et y les coordonnées d'un nœud quelconque et ε une valeur minimale servant de critère de proximité, établie en fonction des dimensions du domaine de calcul et de la finesse de la discrétisation.

C'est donc dire que les nœuds trouvés seront ceux situés à l'intérieur d'une distance minimale de la droite qui forme la discontinuité. La discontinuité est définie en définitive par les coordonnées des deux nœuds des extrémités de cette droite.

Une fois les nœuds localisés, une nouvelle série de nœuds est créée ayant les mêmes coordonnées que les nœuds trouvés et ils sont ajoutés à la liste globale des nœuds. Les connectivités sont ensuite modifiées de manière à ce que les nouveaux nœuds remplacent les nœuds existant pour tous les éléments situés d'un même côté de la discontinuité. Pour déterminer de quel côté de la discontinuité un élément se trouve, les nœuds de cet élément sont comparés avec les nœuds des éléments adjacents, après avoir pris pour base le premier nœud d'une discontinuité donnée.

Après avoir optimisé les matrices globales en réintégrant les données dans Patran et en utilisant le service qui y existe à cet effet, les nœuds bordant la discontinuité sont de nouveau localisés. Le programme sépare ensuite les nœuds appartenant à chaque côté de la discontinuité, en retrouvant les éléments auxquels ils appartiennent et en déterminant avec la procédure utilisée précédemment le côté sur lequel ces éléments se trouvent.

Les éléments ressorts sont ensuite créés pour chaque paire de nœuds situés aux mêmes coordonnées. Ces éléments sont finalement rajoutés au fichier des connectivités.

5.2.4 CONSTRUCTION ET RÉOLUTION DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS

La procédure d'organisation des données du calcul de même que la résolution subséquente du système d'équations se font à l'aide d'un ensemble de modules spécialisés du logiciel MEF. Nous allons donner ici les principaux traits de l'organisation de ces modules. Pour plus de détails, on pourra consulter la description qui en est faite dans Dhatt et Touzot [25].

5.2.4.1 Résolution du système d'équations

Les modules se divisent en trois groupes fonctionnels:

- les modules d'organisation des données
- les modules faisant les traitements numériques au niveau élémentaire
- les modules complétant la résolution globale du système d'équations

La collecte systématique des coordonnées des nœuds et des connectivités, l'organisation de ces données par l'assemblage de la matrice de rigidité, et la collecte des valeurs des conditions aux limites est faite par des modules spécifiques et spécialisés du programme. Le regroupement de ces données se fait dans deux tables: coordonnées et nœuds. Ces modules sont pilotés par le programme BLCOOR.

Pour chaque type d'élément utilisé dans le modèle géométrique, un bloc fonctionnel fait le calcul des points et coefficients de Gauss, réalise l'intégration de la matrice de rigidité élémentaire et calcule le vecteur des sollicitations élémentaires tel que décrit par les équations 4.16 à 4.18.

Le contrôle de processus qui consiste à sélectionner le code approprié pour chaque élément est faite par le module BLELEM.

La résolution globale du système par décomposition de Gauss est mise en œuvre par un autre groupe de programmes, dans trois étapes principales, effectuées par des modules indépendants:

- l'assemblage des matrices élémentaires en matrices globales
- la décomposition et le stockage des sous-matrices
- la résolution

Dans le cas de la résolution d'un système linéaire, le module qui coordonne ces opérations est SOL. Il produit les valeurs du potentiel de vitesse et du gradient du potentiel aux nœuds et aux points d'intégration.

5.2.4.2 Calcul de la circulation

Dans le cas du calcul de l'écoulement potentiel avec circulation, ce système linéaire doit encore être résolu par itérations successives du fait qu'une partie des conditions limites est posée hypothétiquement, soit celles reliées aux discontinuités de circulation. Les valeurs des conditions à imposer à ces nœuds sont déterminées par la procédure itérative décrite à la section 4.2.

Cette procédure est mise en œuvre dans un groupe de modules spécifiques pilotés par le bloc fonctionnel de résolution : BLTURB. Elle consiste à faire successivement les étapes suivantes jusqu'à l'atteinte de la convergence :

- calcul des contributions des sauts $\Delta\phi$ aux matrices de rigidité élémentaires,
- calcul des contribution des sauts de potentiel aux vecteurs force,
- assemblage des matrices élémentaires.
- résolution du système d'équations avec le saut $\Delta\phi_{i-1}$.
- résolution du système d'équations avec le saut $\Delta\phi_i$,
- lecture des vitesses aux nœuds de la discontinuité de Kutta-Joukowski et
- comparaison des grandeurs des vitesses. application du critère de convergence et calcul de nouveaux sauts de potentiel.

L'algorithme détaillé est montré à la figure 5.2.

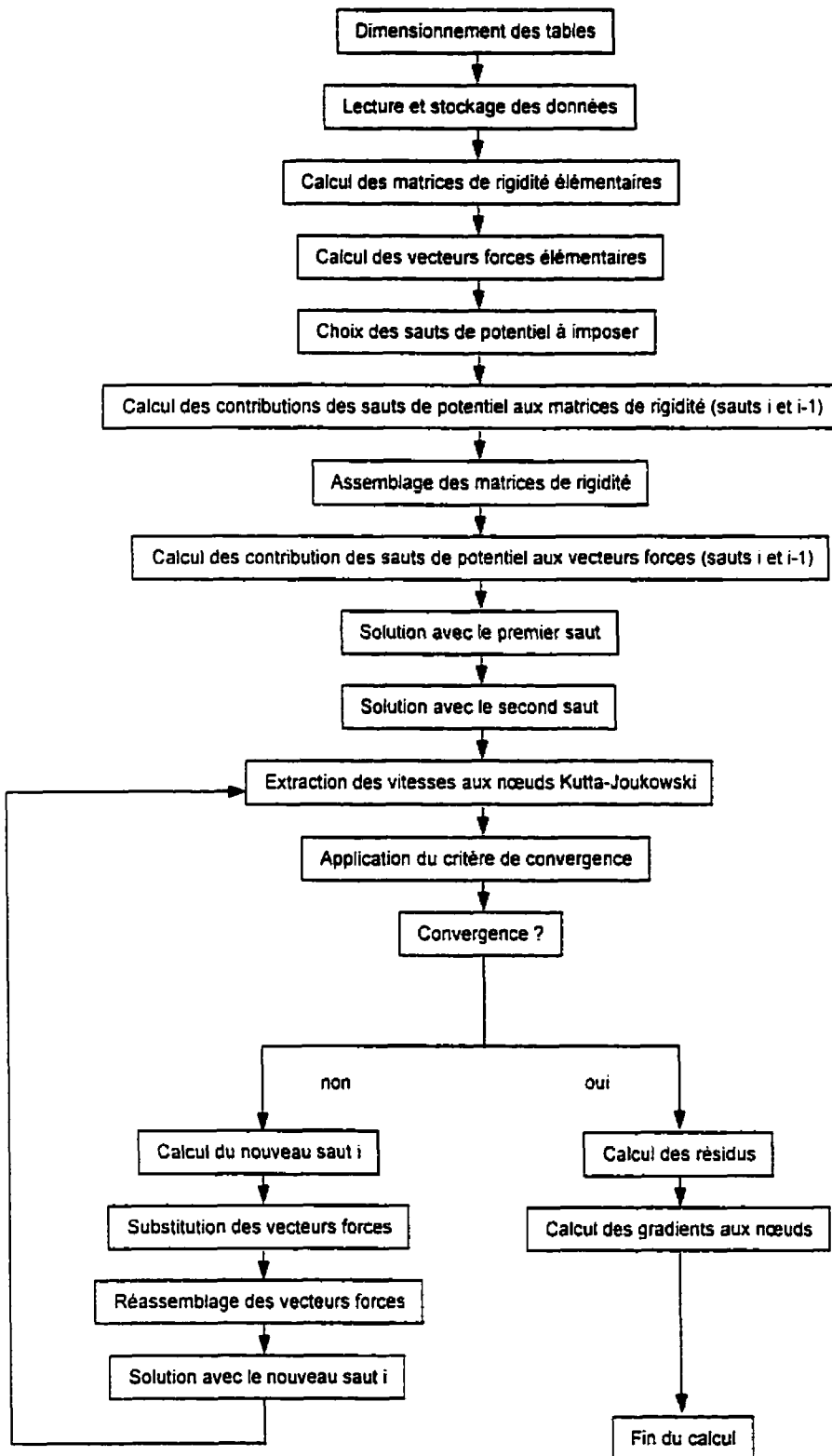


Figure 5.2: Algorithme du calcul du potentiel de vitesse

5.2.5 CALCUL DE LA POSITION DE LA SURFACE LIBRE

Le programme de calcul de la position de la surface libre regroupe toutes les opérations relatives à ce calcul, à partir de l'extraction des données pertinentes dans les résultats du calcul de champ de vitesse par éléments finis, jusqu'à la production des données nécessaires à la construction du domaine de calcul et du maillage du pas de calcul suivant. Ce processus est décrit graphiquement à la figure 5.3.

5.2.5.1 Localisation des nœuds de la surface libre

La première étape dans ce programme consiste à localiser ceux des nœuds du maillage éléments finis qui se trouvent sur la surface libre. Cette opération est faite en deux étapes. D'abord, les nœuds situés sur l'extérieur du domaine sont trouvés, ensuite, parmi ces nœuds, les nœuds faisant partie de la surface libre sont identifiés.

La stratégie utilisée ici pour trouver les nœuds situés sur la frontière du domaine est basé sur l'utilisation d'éléments quadratiques (par exemple des éléments triangulaires à 6 nœuds ou rectangulaires à 8 nœuds). Il s'agit de noter le fait que, pour des éléments quadratiques, les nœuds centraux des côtés des éléments se trouvant sur la frontière du domaine ne seront partagés par aucun autre élément. Le processus de localisation des nœuds de contour cherche donc d'abord les nœuds n'appartenant qu'à un seul élément, et retrouve ensuite les autres nœuds situés sur le même côté d'élément. Les nœuds redondants sont par la suite éliminés, pour donner la série ordonnée des nœuds du contour du domaine.

Pour localiser ceux de ces nœuds qui appartiennent à la surface libre, la technique adoptée a été de trouver le nœud situé aux coordonnées du début de la surface libre, et d'identifier celui des deux nœuds adjacents qui se trouve dans la même direction que la vitesse au début de la surface libre. Les autres nœuds de la surface libre sont identifiés en suivant l'enchaînement des nœuds des côtés d'éléments adjacents, jusqu'à atteindre un nœud dont les coordonnées correspondent à l'extrémité du jet. Le résultat est ainsi une liste ordonnée des nœuds situés sur la surface libre.

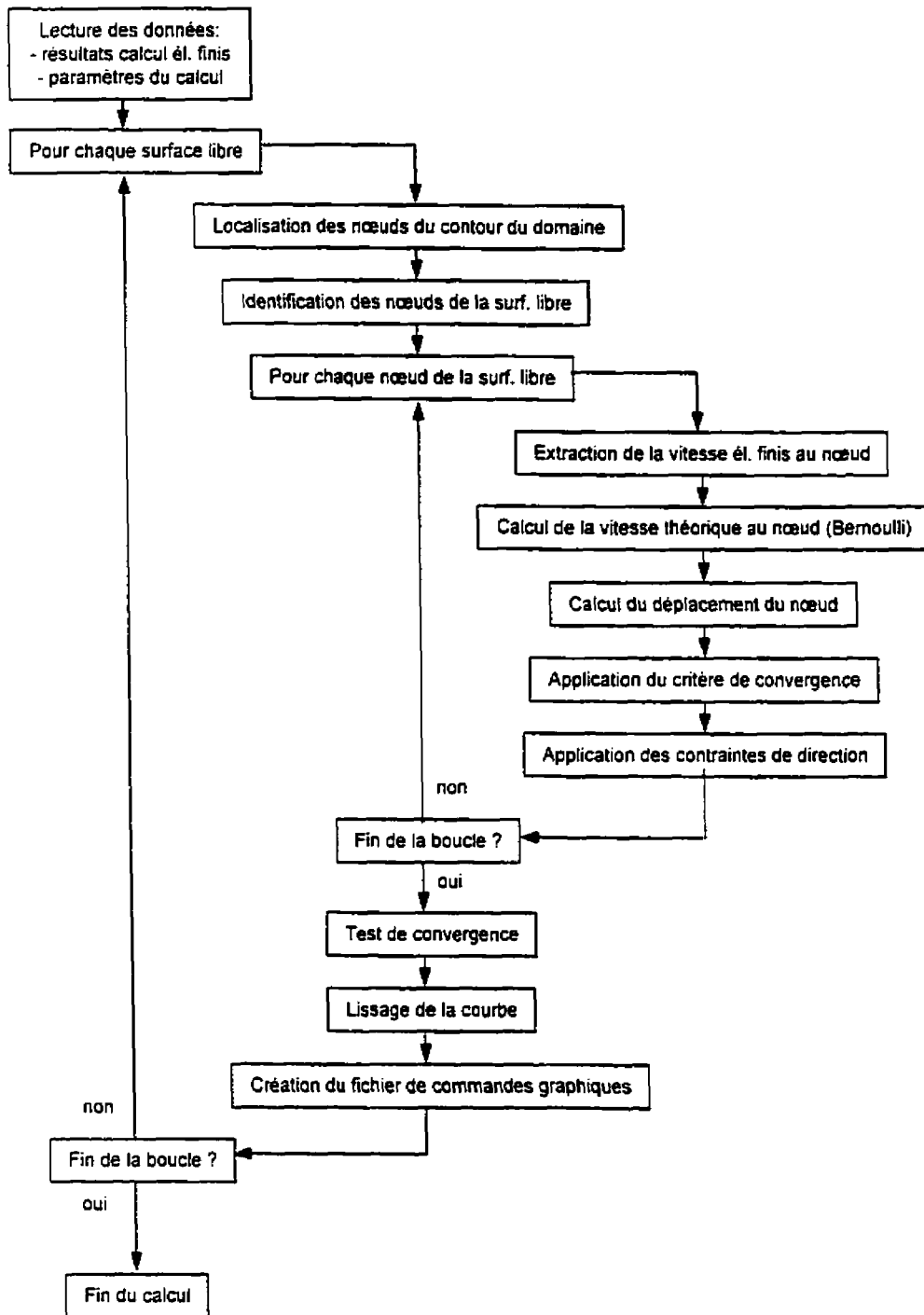


Figure 5.3: Algorithme du calcul de la position des surfaces libres

5.2.5.2 Déplacement de la surface libre

Pour chacun de ces nœuds, la vitesse est extraite des résultats du calcul du potentiel, et la vitesse théorique est calculée en fonction des coordonnées du nœud, avec l'équation (3.28). Ces deux valeurs sont introduites dans l'équation (4.51) pour donner le déplacement de ce nœud de la surface libre. À ce déplacement, les contraintes directionnelles (équation 4.52) peuvent être appliquées en fonction des paramètres du calcul.

5.2.5.3 Lissage de la courbe calculée

La courbe ainsi calculée est ensuite lissée par une série de sous-modules qui génèrent une courbe B-spline en fonction de paramètres spécifiques à chaque surface libre. Les nœuds résultants sont alors insérés dans un fichier de commandes graphiques Patran, qui génère un nouveau modèle géométrique et le décompose en éléments.

6 CALCULS ET RÉSULTATS

Des calculs ont été faits sur plusieurs modèles géométriques, pour valider la méthode de calcul décrite ici.

D'une part, des modèles simples ont été construits pour valider individuellement chaque partie du code de calcul, soit:

- le traitement d'un problème d'écoulement potentiel comportant des parois en mouvement,
- la solution éléments finis de l'écoulement potentiel avec circulation et
- le calcul d'un écoulement avec des surfaces libres.

D'autre part, un modèle simplifié de la géométrie de la turbine Banki a été testé. Cela a permis de voir l'effet combiné des différentes parties du calcul, de même que d'appréhender l'allure de l'écoulement dans la turbine réelle.

Les différents problèmes traités et les résultats obtenus sont décrits dans ce qui suit.

6.1 CYLINDRE EN MOUVEMENT: VALIDATION DE L'ÉLÉMENT DE PAROI MOBILE

6.1.1 CALCULS EFFECTUÉS

Le premier calcul effectué vise à confirmer la validité du calcul d'écoulement autour de parois en mouvement. L'écoulement dans ce calcul sera donc exempt de circulation et de surfaces libres, de sorte à ne vérifier que ce seul aspect. Pour arriver à faire de façon simple une comparaison rigoureuse, on a utilisé un autre calcul par éléments finis, fait sur la même géométrie, mais sans parois mobiles.

La géométrie considérée, qui donne lieu à un écoulement sans circulation, est un cercle se déplaçant dans un plan (ou, indifféremment, un cylindre de longueur infinie dans l'espace). Le problème à parois mobiles est alors l'écoulement autour du cylindre auquel on donne une vitesse

unitaire dans un fluide immobile. Le problème à parois fixes correspondant est l'écoulement à une vitesse unitaire du fluide autour du cylindre fixe. La comparaison peut alors s'effectuer entre les vitesses absolues d'un des deux problèmes et les vitesses relatives de l'autre, qui doivent être égales en chaque point de calcul. En utilisant les indices m et f pour représenter respectivement les résultats du calcul avec le cylindre mobile et les résultats du calcul avec le cylindre fixe, les indices a et r pour les vitesses absolues et les vitesses relatives et v_∞ pour la vitesse d'écoulement autour du cylindre fixe, on a:

$$\mathbf{v}_{m,r} = \mathbf{v}_{m,a} + \mathbf{v}_\infty \quad (6.1)$$

Et le calcul vise à montrer que:

$$\mathbf{v}_{f,a} = \mathbf{v}_{m,r} \quad (6.2)$$

à chaque point de calcul.

Ce type de comparaison reste valide tant que les vitesses sont linéaires. Il ne pourrait servir à tester les éléments de parois mobiles dans des problèmes où les parois ont des mouvements de rotation. Dans ce cas, en effet, un des deux écoulements, considéré en vitesse relative ou absolue, ne serait pas irrotationnel et ne pourrait être calculé par une équation de Laplace avec un potentiel de vitesse. Or, les éléments de parois mobiles seront justement utilisés ci-après sur des solides qui subissent des mouvements de rotation (les aubes de la turbine). Le traitement des mouvements de rotation dans le calcul des conditions limites n'amène cependant qu'une modification mineure au programme et n'a pas été validé explicitement dans ce travail.

Le modèle géométrique, divisé en éléments finis, sur lequel ont été faits les calculs est montré à la figure 6.1. Il s'agit d'un cercle situé entre deux parois horizontales. Le fluide, dans le cas où il est en mouvement, entre par le côté gauche et sort par la droite. La vitesse de déplacement du cylindre est imposée en définissant des éléments de surface sur le pourtour du cercle. La vitesse d'écoulement du fluide, quant à elle, est imposée en utilisant des éléments de surface à la sortie du domaine, c'est-à-dire sur le côté droit. Une valeur nulle du potentiel de vitesse est imposée sur le côté gauche.

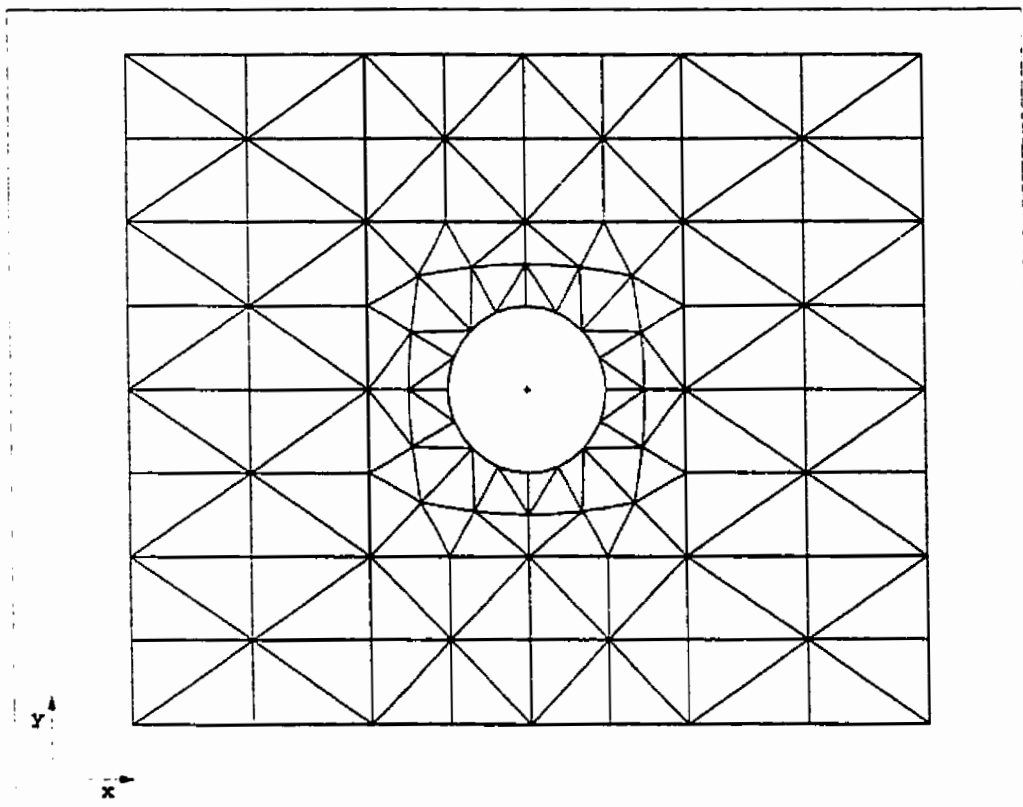


Figure 6.1 : Modèle géométrique du cylindre dans une conduite

6.1.2 RÉSULTATS

Les vitesses absolues calculées lorsqu'on impose au cylindre une vitesse unitaire vers la droite sont montrées à la figure 6.2. La figure 6.3, quant à elle, montre les vitesses relatives considérées à partir d'une référence fixée au cylindre. La figure 6.4, finalement, montre les vitesses absolues de l'écoulement autour du cylindre fixe, lorsque le fluide entre par la gauche avec une vitesse unitaire.

Ces deux derniers résultats montrent une parfaite concordance. Les valeurs de vitesse correspondent parfaitement à chaque point de calcul. Si les vitesses en x ne peuvent pas être comparées avec une complète précision, en raison de l'addition de v_∞ pour obtenir la vitesse relative dans le cas du cylindre mobile, qui fait perdre quelques décimales, les composantes en y concordent en tous les points jusqu'à la dernière décimale.

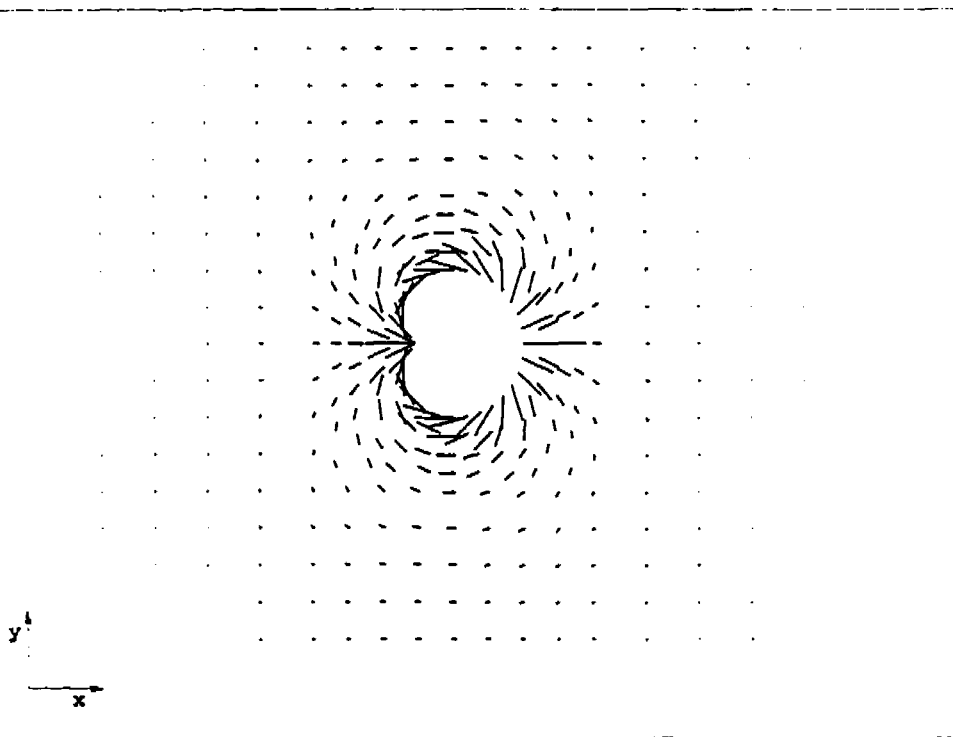


Figure 6.2 : Cylindre en mouvement, vitesses absolues

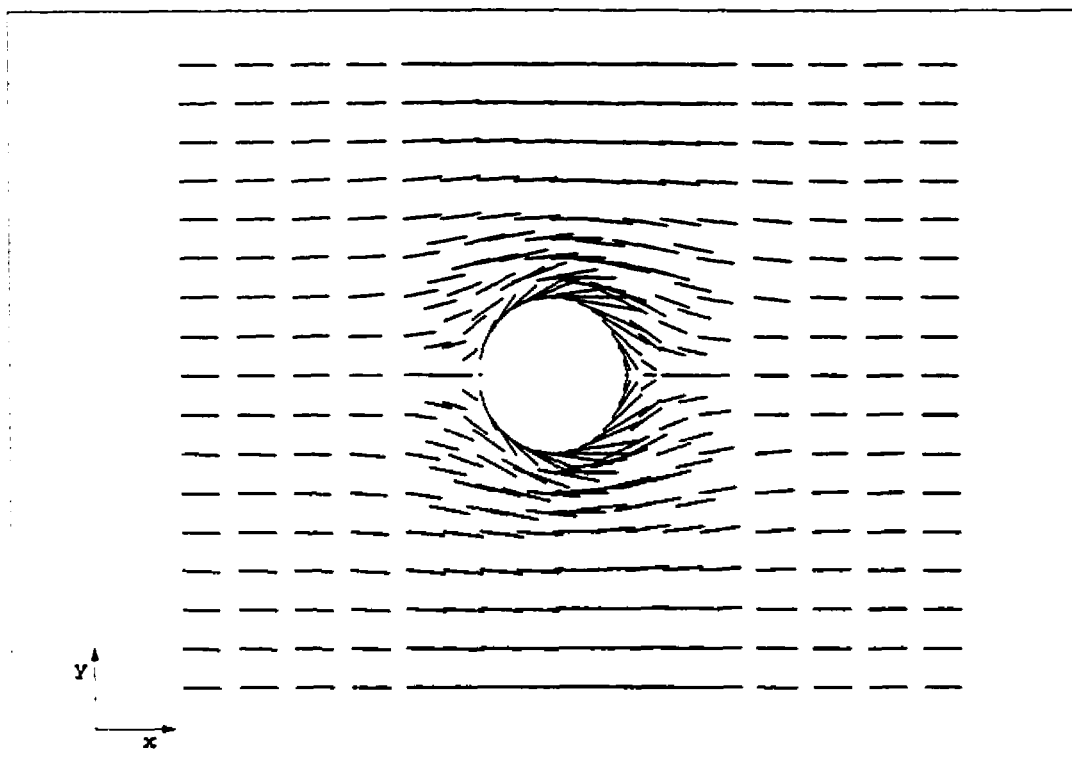


Figure 6.3 : Cylindre en mouvement, vitesses relatives

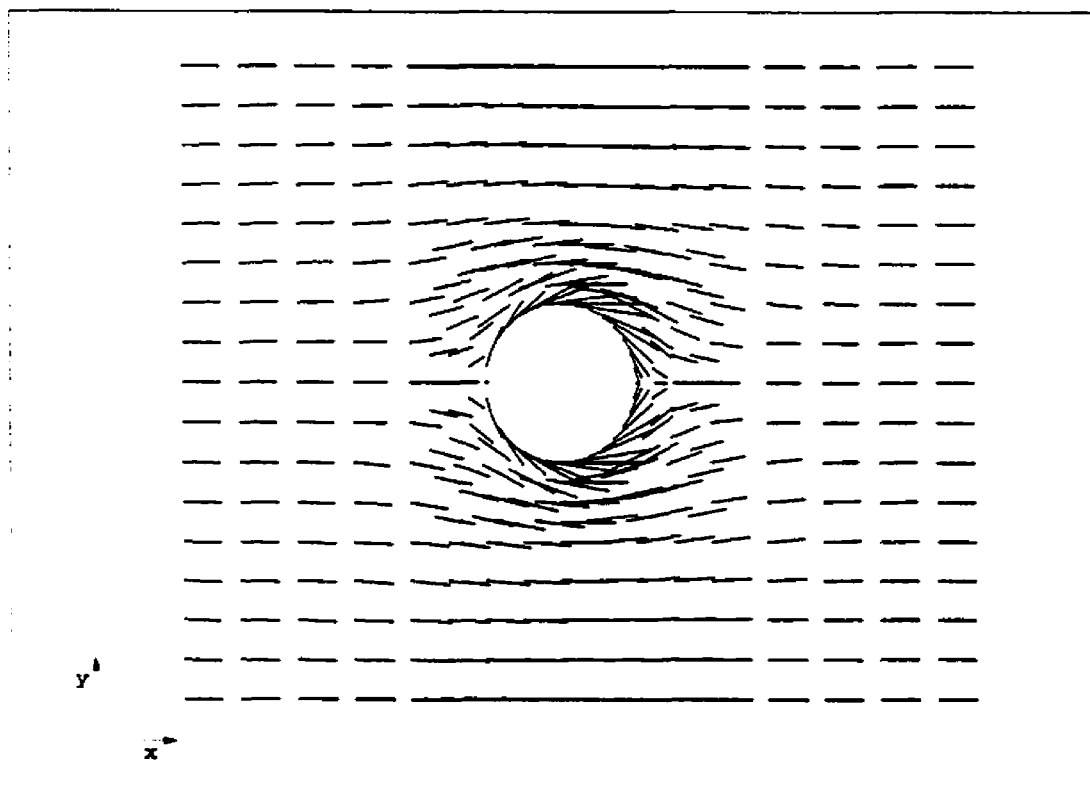


Figure 6.4 : Fluide en mouvement, vitesses absolues

6.2 PROFILÉ KUTTA-JOUKOWSKI: VALIDATION DU CALCUL DE LA CIRCULATION

6.2.1 CALCULS EFFECTUÉS

Pour vérifier la qualité du calcul par éléments finis des écoulements potentiels avec circulation obtenus des codes de calcul utilisés ici, un test a été fait sur l'écoulement autour d'un profilé généré par une transformation conforme dite de Kutta-Joukowski.

Cette approche permet de calculer l'écoulement de fluide idéal, et en particulier la circulation, autour d'une forme géométrique simple de façon analytique. Il est alors possible de comparer ce résultat avec celui d'un calcul par éléments finis fait sur la même géométrie.

Notons qu'il y aura dans ce cas deux niveaux d'approximation faites par le calcul numérique par rapport au calcul analytique. D'abord, l'approximation due à la discrétisation du domaine de calcul lui-même. Ensuite, celle provenant du fait que le domaine de calcul doit avoir une dimension finie dans le calcul numérique, alors qu'il est infini dans le calcul analytique.

Pour le calcul par éléments finis, on considérera donc un domaine suffisamment grand par rapport aux dimensions du profilé pour que les perturbations de l'écoulement dues à la présence des bords du domaine puissent être minimisées, sans que soit augmentée démesurément la taille du calcul. Dans le présent calcul, le côté du domaine est de 5 fois la longueur du profilé. On s'attardera ici à comparer les conditions d'écoulement sur le pourtour du profilé et la valeur de la circulation, obtenues de la méthode analytique et du calcul par éléments finis.

6.2.1.1 Calcul analytique

Le calcul analytique consiste à faire une transformation conforme de l'écoulement autour d'un cercle dans le plan. Cette opération permet à la fois de transformer le cercle en un profilé Joukowski, et de transformer le champ de vitesse autour du cercle en un champ de vitesse autour du profilé. La dérivation qui suit est tirée de Houghton, Brown et Cunnigham [51].

La transformation utilisée ici, appelée transformation de Kutta-Joukowski, s'écrit:

$$\zeta = z + \frac{b^2}{z} \quad (6.3)$$

avec: z , la variable complexe dans le plan initial,

ζ , la variable complexe dans le plan transformé, et

b , une constante définissant la géométrie du domaine transformé.

Pour obtenir de cette transformée un profilé asymétrique et un bord de fuite effilé, qui puisse générer de la circulation, on utilise, dans le domaine initial un cercle qui est décentré par rapport à l'origine du système de coordonnées. On applique ensuite à ce domaine initial la transformation conforme.

En explicitant les composantes réelles et imaginaires des variables complexes par x , y , ξ et η , on a:

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad \zeta = \xi + i\eta \quad (6.4)$$

Les coordonnées des points de la circonférence du cercle décentré du plan z sont :

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta + be \\ y &= a \sin \theta + b\beta(1 + e) \end{aligned} \quad (6.5)$$

où: a représente le rayon du cercle,

e est l'excentricité du cercle, et

β correspond à la cambrure du profilé

En appliquant la transformation conforme (équation 6.3) au plan z , les coordonnées du contour du profilé obtenu dans le plan ζ sont alors:

$$\xi = x \left(1 + \frac{b^2}{x^2 + y^2} \right) \quad \eta = y \left(1 - \frac{b^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (6.6)$$

Le cercle initial et le profilé résultant de la transformation sont tracés aux figures 6.5 et 6.6.

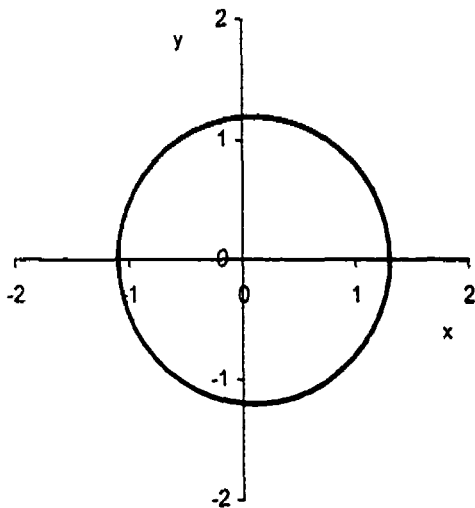


Figure 6.5 : Cercle transformé

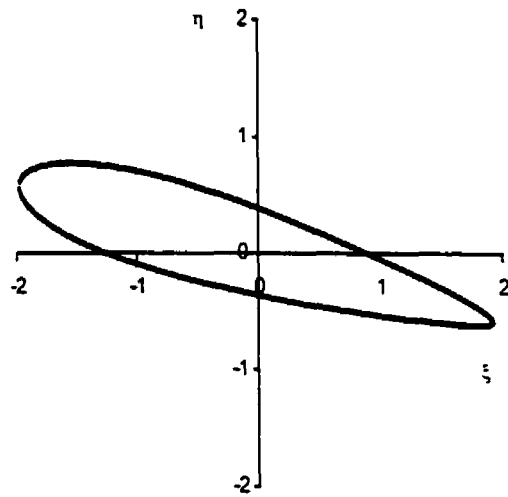


Figure 6.6 : Profilé Joukowski

La vitesse v_c de l'écoulement de fluide idéal sur le contour du cercle dans le plan z est donnée par:

$$v_c = 2V_\infty (\sin \theta_c + \sin(\alpha + \beta)) \quad (6.7)$$

où θ_c est l'angle d'un point sur le contour du cercle en utilisant le centre pour référence. Cette équation résulte de la superposition d'un champ de vitesse linéaire et d'une circulation suffisante pour ramener le point d'arrêt aval au bord de fuite, dans le plan du profilé (condition de Kutta-Joukowski).

En appliquant encore une fois la transformation conforme, on obtient le champ de vitesse sur le contour du profilé, v_j . La transformation du champ de vitesse se base en fait sur:

$$\frac{v_j}{v_c} = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| \quad (6.8)$$

valide pour des fonctions analytiques. La transformation donne la vitesse dans le plan transformé:

avec:

$$A = 1 - \frac{b^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad (6.10)$$

$$B = \frac{2b^2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Dans ces expressions, α est l'angle d'attaque, β représente la cambrure du profilé. V_∞ est la vitesse du fluide loin en amont du profilé et θ , l'angle d'un point situé sur le contour du profilé, mesuré de l'origine du système de coordonnées.

Ces valeurs de vitesse pourront être comparées aux résultats du calcul numérique obtenus aux points de calcul situés sur le contour du profilé. On aura ainsi une idée de la qualité du calcul numérique au niveau local, pour chaque point de calcul.

Pour juger des résultats du calcul éléments finis dans une perspective globale, on peut comparer la valeur de la circulation. Celle-ci est un résultat immédiat du calcul numérique, puisqu'elle est déterminée itérativement à l'intérieur du processus de calcul, de manière à être utilisée pour imposer les conditions limites. Elle peut aussi être calculée par la méthode analytique montrée ici, puisqu'elle doit être connue pour obtenir l'équation des vitesses autour du profilé (équation 6.7). Sa valeur est donnée par :

$$\Gamma = 4\pi V_\infty a \sin(\alpha + \beta) \quad (6.11)$$

Le coefficient de pression sera aussi utilisé pour illustrer les résultats; il est défini par:

$$C_p = 1 - \frac{v^2}{V_\infty^2} \quad (6.12)$$

Le calcul de la géométrie du profilé et le calcul analytique de la vitesse sur le contour du profilé ont été faits par des programmes en langage C.

La figure 6.6 montre le profilé Joukowski ainsi calculé, alors que la figure 6.7 montre le résultat du calcul de la vitesse sur son contour. Les valeurs correspondantes du coefficient de pression sont montrées à la figure 6.8. La distribution de vitesse et le coefficient de pression sont

tous deux tracés en fonction de la corde. Pour chaque abscisse, il y a une valeur du côté intrados et une autre du côté extrados du profilé.

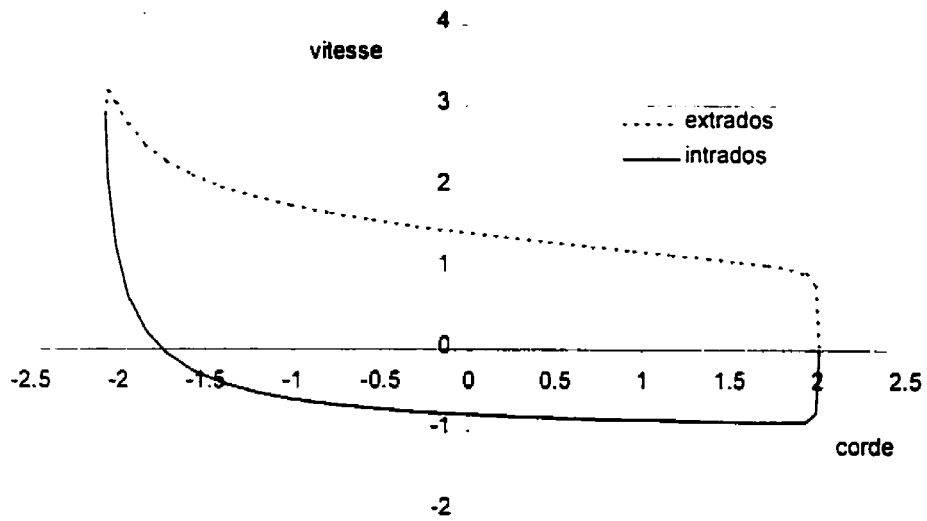


Figure 6.7 : Vitesse sur le contour du profilé Joukowski

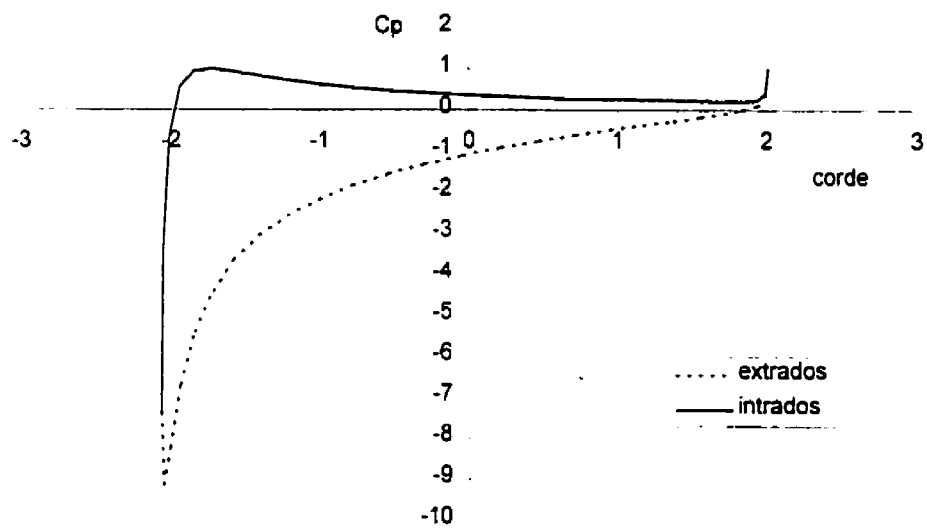


Figure 6.8 : Coefficient de pression sur le contour du profilé Joukowski

6.2.1.2 Calcul numérique

Le modèle géométrique sur lequel a été fait le calcul par éléments finis de l'écoulement autour d'un profilé Joukowski est montré à la figure 6.9. Il est constitué du profilé généré selon le calcul précédent et montré à la figure 6.6. Ce profilé est placé au centre d'une surface carrée dont le côté est d'environ 5 fois la largeur du profilé.

La vitesse est imposée à l'aide d'éléments à 3 nœuds disposés sur le bord du domaine où sort l'écoulement (à droite). L'écoulement se fait selon la direction positive de l'axe des x . Une discontinuité dans la surface de calcul est créée sur une droite issue du bord de fuite du profilé et qui va rejoindre le bord du domaine de calcul, à la section de sortie de l'écoulement. Cette droite apparaît à la figure 6.9. Deux séries de nœuds superposés y sont définis de sorte que les éléments situés de chaque côté ne partagent aucun nœud. Les nœuds superposés sont par contre reliés entre eux par des éléments ressorts, tels qu'on les a décrits plus haut (section 4.2).

Le domaine de calcul après la partition en éléments triangulaires à 6 nœuds est montré à la figure 6.10. Le maillage est plus raffiné autour du profilé (figure 6.11).

Une valeur constante et nulle de ϕ est imposée aux nœuds situés sur la frontière amont.

6.2.2 RÉSULTATS

La comparaison des calculs analytique et numérique sera faite de deux façons. D'abord en fonction des valeurs globales de l'écoulement, ensuite au niveau des valeurs locales, aux points de calcul situés autour du profilé. Mais d'abord, les résultats peuvent être évalués en fonction de l'allure générale de l'écoulement.

Le champ de vitesse calculé par éléments finis apparaît aux figures 6.12 et 6.13. L'examen du champ de vitesse à proximité du bord de fuite du profilé (figure 6.13) montre qu'il n'y a pas de

retour de l'écoulement vers le côté extradados. Les vitesses au bord de fuite sont au contraire parallèles au profilé. On voit ainsi satisfaite la condition de Kutta.

D'autre part, toujours sur la figure 6.13, on peut aussi vérifier la continuité de la vitesse de part et d'autre de la discontinuité de circulation. Cela montre l'efficacité des éléments ressorts à créer un champ de potentiel discontinu tout en préservant la continuité de la vitesse.

La comparaison des valeurs globales de la circulation obtenues des deux calculs est concluante, bien qu'ici il y ait un écart notable:

Circulation par calcul analytique (équation 6.11):	4,4563
Circulation par calcul éléments finis:	4,1597
Écart:	6,7 %

La comparaison des valeurs locales de la vitesse par le biais du coefficient de pression sur le pourtour du profilé montre au contraire une corrélation très satisfaisante (voir figure 6.14).

Il faut donc conclure à la fiabilité, au niveau local d'abord et, dans une moindre mesure au niveau global, des résultats de cette partie du code de calcul dans la solution de l'équation de Laplace et dans la prise en compte de l'effet de la circulation.

La convergence du calcul itératif de la circulation est par ailleurs rapide. Tous les essais ont atteint la résolution en moins de 5 pas de calcul.

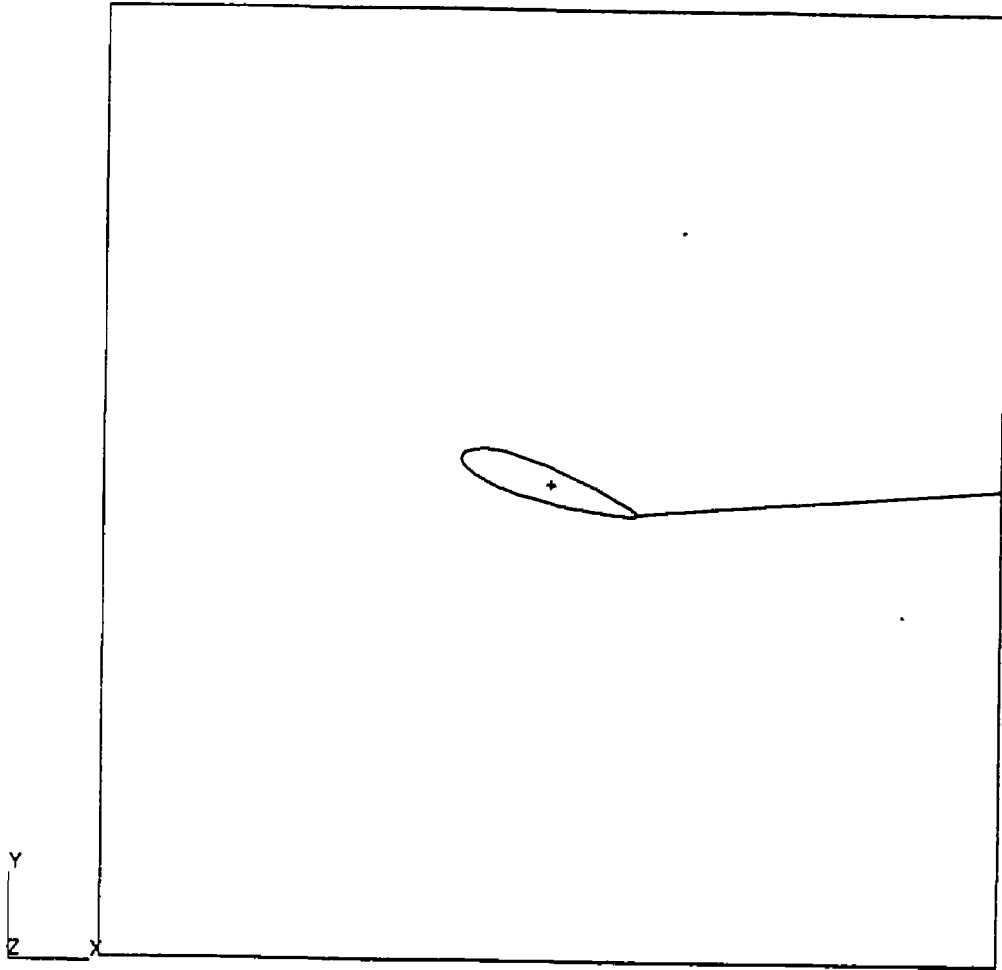


Figure 6.9 : Modèle géométrique de l'écoulement autour d'un profilé Joukowski

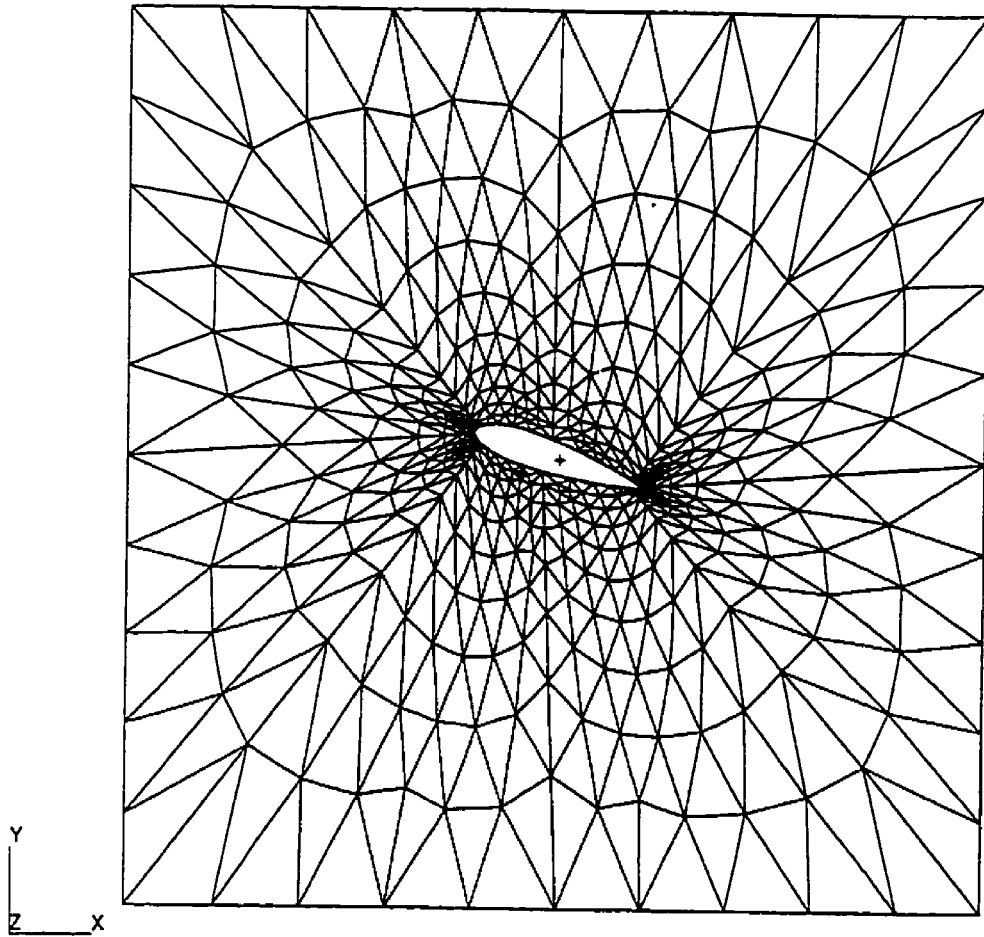


Figure 6.10 : Maillage du domaine

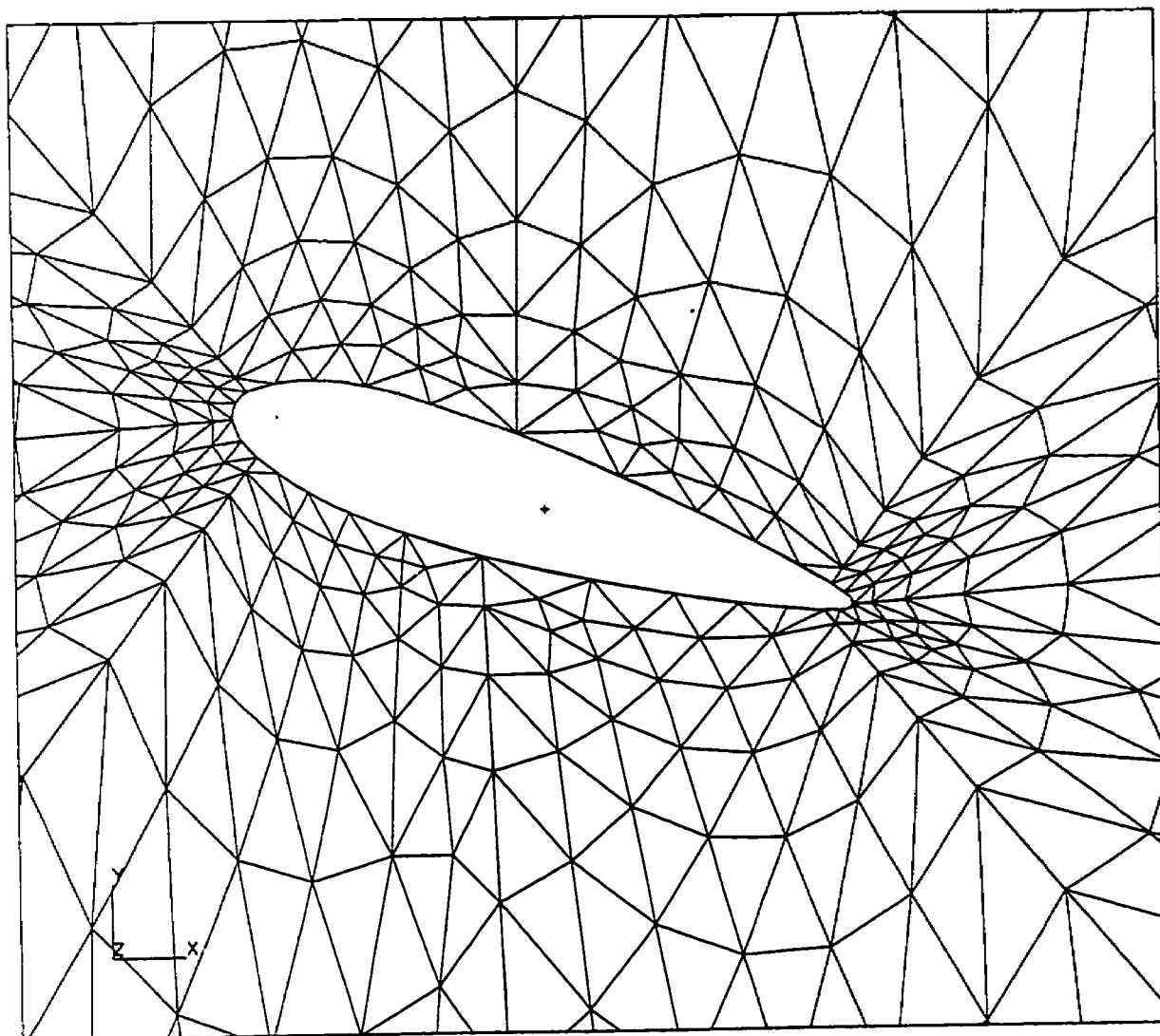


Figure 6.11 : Maillage autour du profilé Joukowski

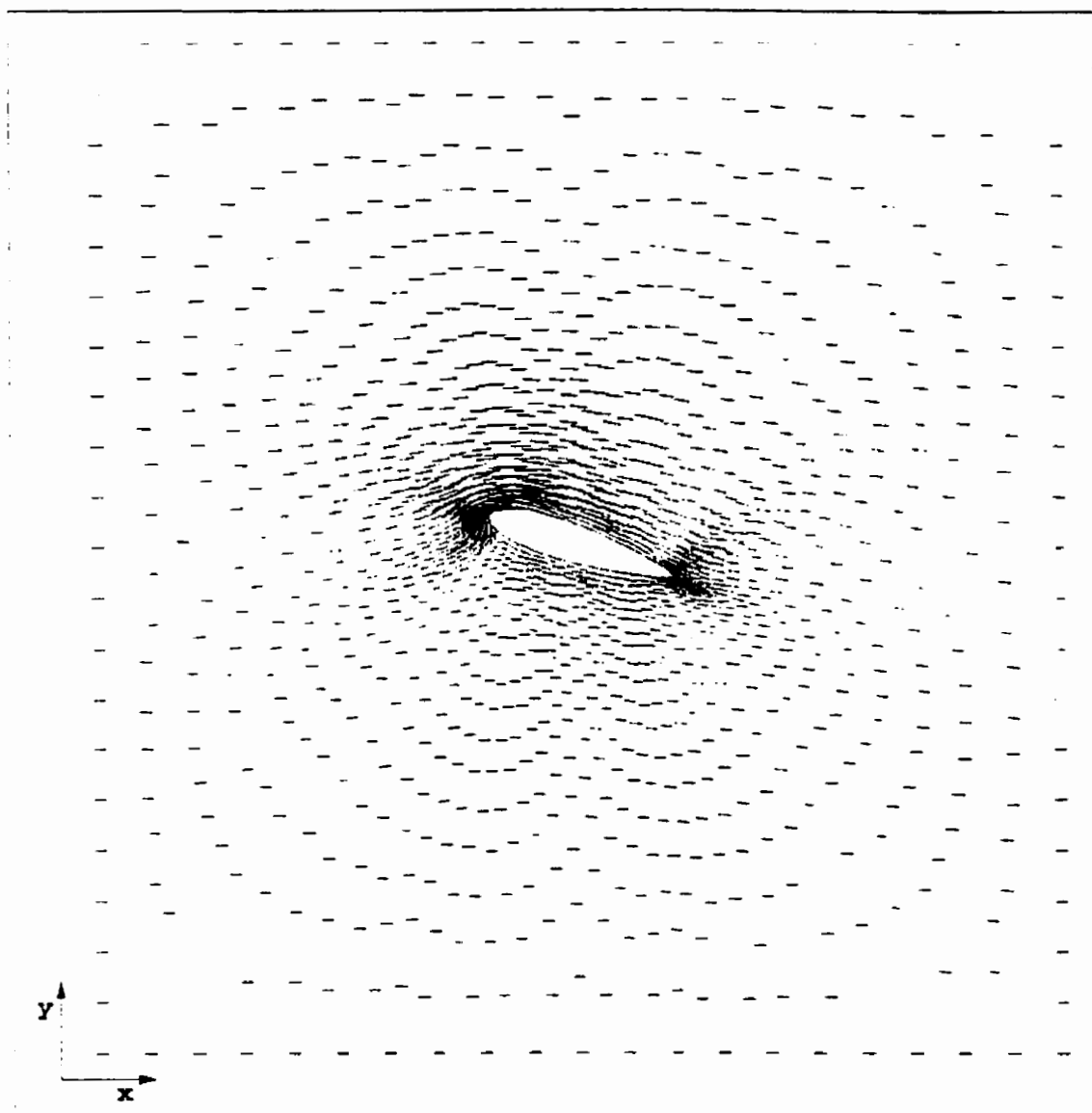


Figure 6.12: Champ de vitesse (profilé Joukowski)

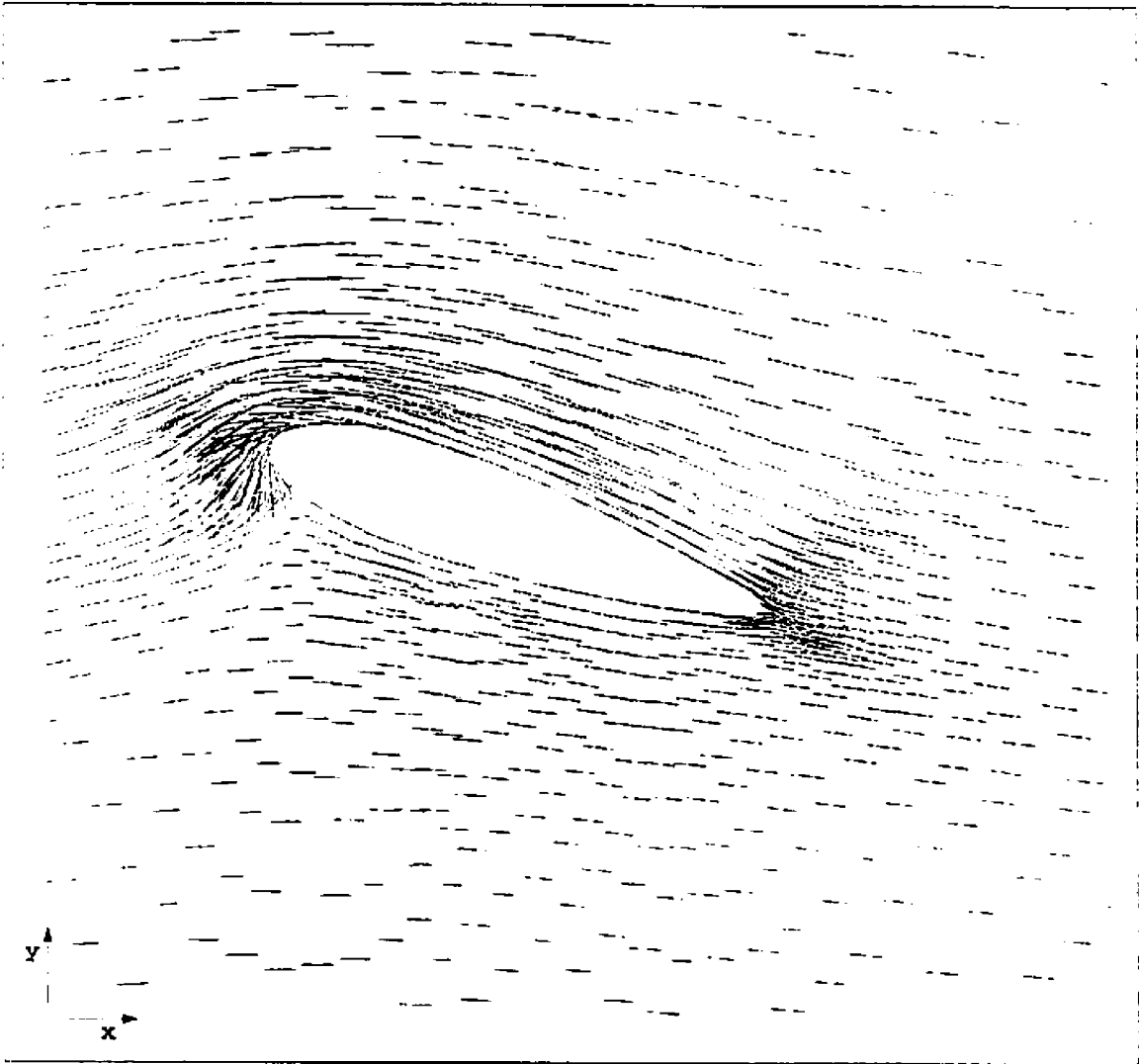


Figure 6.13: Champ de vitesse autour du profilé

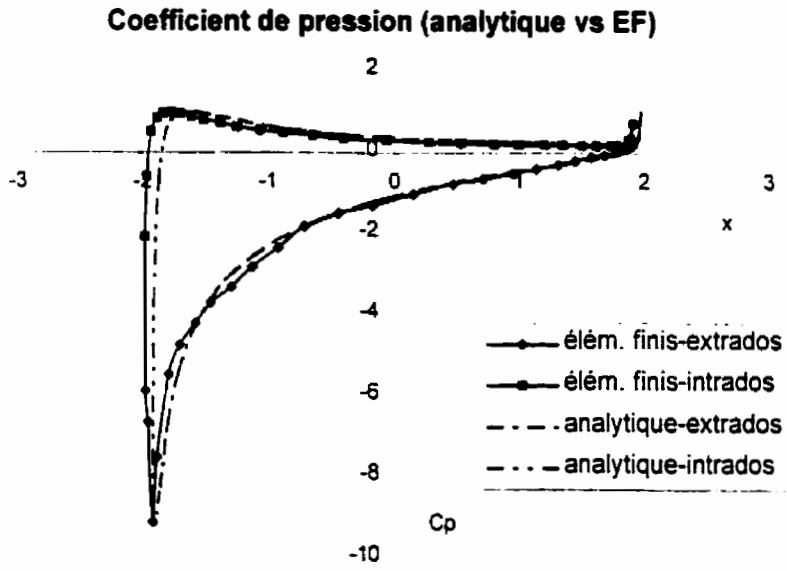


Figure 6.14 : Coefficient de pression autour du profilé

6.3 JET À TRAVERS UN ORIFICE: VALIDATION DU CALCUL DE SURFACE LIBRE

6.3.1 CALCULS EFFECTUÉS

Le calcul suivant servait à vérifier que le calcul itératif converge bien vers la même position de la surface libre que celle qu'elle occupe dans l'écoulement d'un fluide idéal.

Pour ce faire, le code de calcul de la position de la surface libre d'un jet a été utilisé pour calculer l'écoulement issu d'un orifice axisymétrique, pour un écoulement de fluide idéal sous gravité nulle. Ce problème a été résolu avec une grande précision par Hunt, à l'aide d'une méthode qu'il décrit dans une publication de 1968 [42]. Ces résultats servent de base à la comparaison faite ici pour valider le code de calcul de la position des surfaces libres.

Hunt a fait le calcul du champ de vitesse sur la base de la loi de Biot-Savart en modélisant l'écoulement comme celui généré par une surface de tourbillons située sur le contour de la conduite et du jet. Il pose, en coordonnées cylindriques, une équation de la forme:

$$\mathbf{v} = \int \frac{\gamma ds}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{dl} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (6.13)$$

où: \mathbf{dl} et ds sont les coordonnées perpendiculaires d'intégration,

r est la coordonnée radiale, et

γds est l'incrément de circulation dans la direction de ds

Les équations intégrales obtenues de l'imposition des conditions d'écoulement uniforme à l'infini amont et aval étaient ensuite résolues numériquement par intégration de Runge-Kutta.

Pour déterminer la position de la surface libre, il a dû toutefois faire appel à une méthode d'essais et erreurs, puisque celle-ci était inconnue a priori. Il a utilisé pour ce faire le fait que la vitesse le long de la surface libre doit être constante. En effet, en négligeant l'effet de la gravité, l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$H_{st} = \frac{p_{st}}{\gamma} + \frac{V_{st}^2}{2g} = \text{constante} \quad (6.14)$$

avec H_{st} , la hauteur de charge, p_{st} et V_{st} respectivement la pression et la grandeur de la vitesse le long d'une ligne de courant située sur la surface du jet. La pression le long de cette ligne de courant étant uniformément égale à la pression atmosphérique, la vitesse sera aussi constante en grandeur.

Le processus pour calculer la position de la surface libre consistait à choisir une valeur asymptotique du diamètre du jet, d'établir arbitrairement une géométrie de la surface libre, de calculer la vitesse dans l'écoulement et de modifier la courbe à chaque point de calcul jusqu'à obtenir une vitesse constante le long de la surface libre.

En contrepartie d'un volume de calcul assez important, il est parvenu à établir une géométrie de la surface le long de laquelle la vitesse ne s'écarte pas de plus de 1,5% de sa valeur moyenne; et ceci même à proximité de l'orifice. C'était là une amélioration appréciable sur les calculs précédents, et un argument en faveur de la validité de la valeur du coefficient de contraction obtenu. Ses résultats étaient par ailleurs appuyés par une comparaison avec des résultats expérimentaux qui montraient la tendance asymptotique de l'élimination des effets de la viscosité, de la tension de surface et de la gravité. Par ailleurs, ces tests expérimentaux concernaient non seulement la valeur du coefficient de contraction, mais également la forme du jet.

Hunt a publié les résultats de ce calcul pour un jet issu d'une conduite cylindrique, par un orifice d'un diamètre correspondant à 1/4 de celui de la conduite. La même géométrie a été reproduite ici, pour en faire un calcul par éléments finis et une résolution itérative de la position de la surface libre. Cette géométrie est montrée à la figure 6.15, et la discrétisation du domaine apparaît à la figure 6.16. Une valeur nulle du potentiel est imposée à l'entrée du domaine, alors qu'une vitesse unitaire est imposée à l'extrémité du jet par des éléments de condition aux limites.

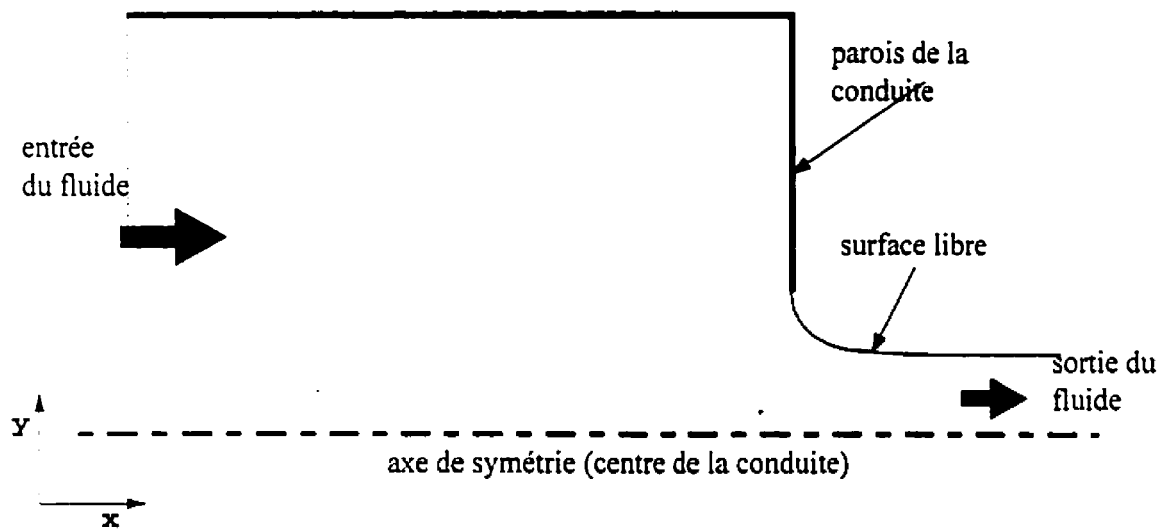


Figure 6.15 : Modèle géométrique (orifice)

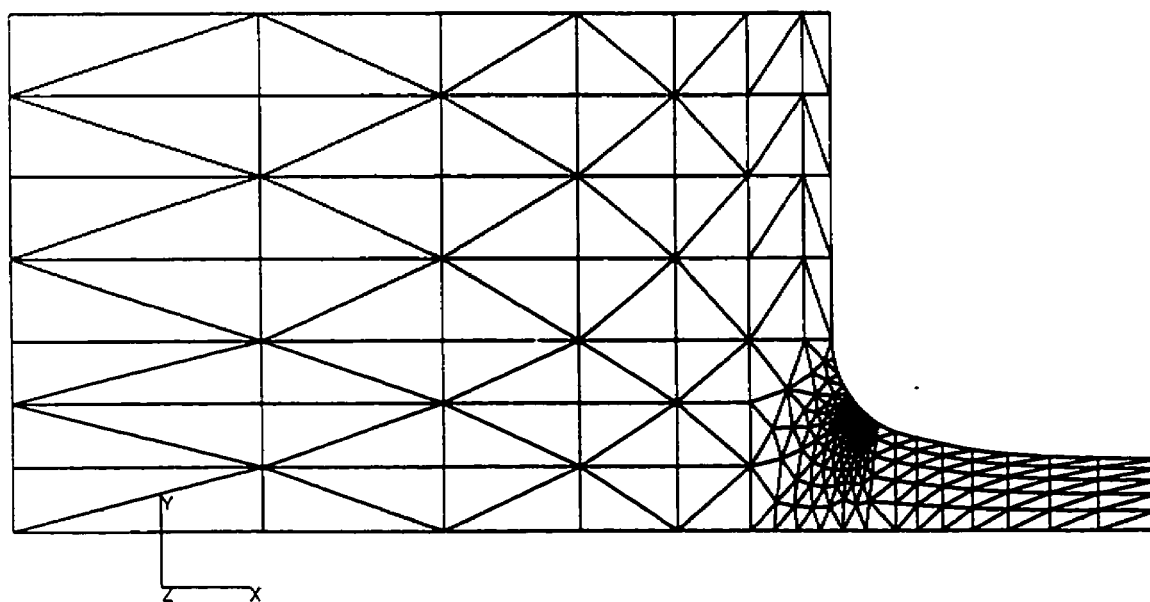


Figure 6.16 : Maillage (orifice)

La comparaison avec le calcul de Hunt sera faite sur la base du coefficient de contraction, donné par :

$$C_c = \frac{D_2}{D_1} \quad (6.15)$$

Où D_1 et D_2 représentent respectivement le diamètre en amont de la conduite, et le diamètre asymptotique du jet. Notons que dans ce calcul, l'effet de la gravité a été négligé pour préserver la symétrie axiale. Le calcul de validation diffère donc légèrement, encore une fois, du calcul qui sera fait dans la turbine, où il n'y a pas de symétrie axiale et où la gravité est présente. L'effet de la gravité sera d'autant négligeable que les vitesses d'écoulement seront grandes.

6.3.2 RÉSULTATS

Le résultat final est bon à la fois pour la précision somme toute acceptable du résultat et la convergence très rapide du calcul. Le champ de vitesse est reproduit à la figure 6.17.

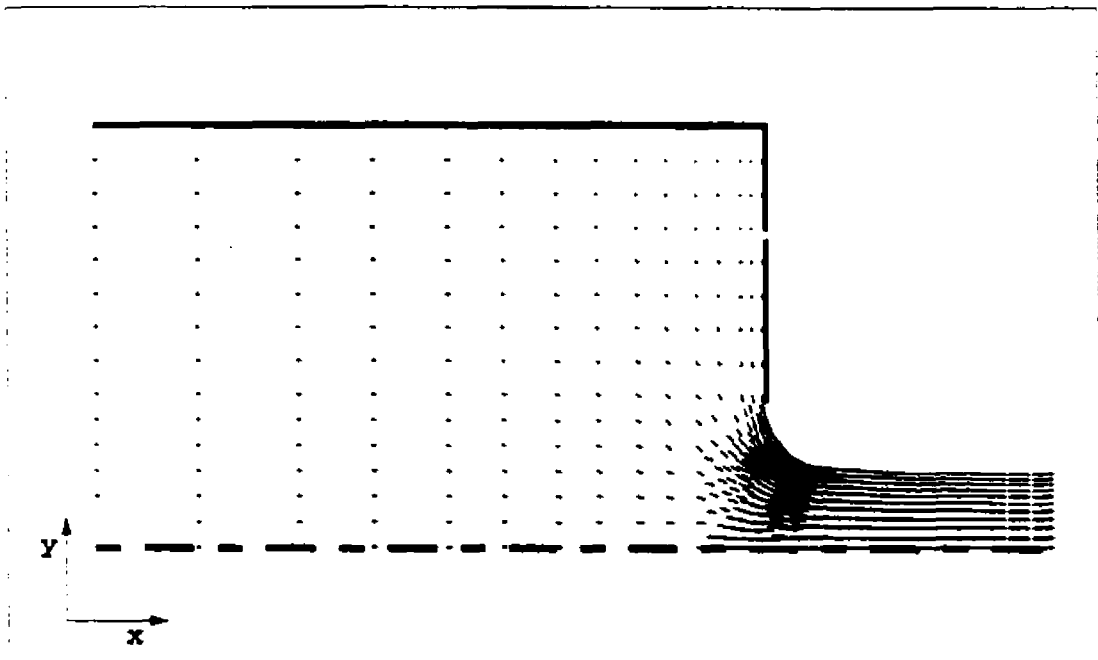


Figure 6.17 : Champ de vitesse (orifice)

Le résultat obtenu pour le coefficient de contraction est particulièrement satisfaisant. La comparaison avec le résultat de Hunt est la suivante:

Coefficient obtenu par calcul éléments finis:	0,5932
Coefficient obtenu par Hunt:	0,5938
Écart:	0,09 % ≈ 0

En fait, l'écart est de l'ordre de grandeur de la précision numérique utilisée dans le calcul par éléments finis. Ce résultat est comparable à celui de Chan et Larock, obtenu par la même méthode et pour la même géométrie ($C_c = 0,5936$).

Deux problèmes avec la solution obtenue doivent toutefois être mentionnés.

D'abord, des résultats précis demeurent difficiles à obtenir près de l'embouchure de la conduite. La figure 6.19 montre en effet que la vitesse tend à s'accélérer à cet endroit pour ne revenir que plus loin à la valeur de convergence. Selon toute vraisemblance, cette accélération est due à la forte courbure des lignes de courant à cet endroit, où l'orientation de la vitesse change de près de 90°. La grandeur de la vitesse varie alors très rapidement d'une ligne de courant à l'autre, ce qui fait qu'une faible différence dans la position de la frontière imperméable du domaine causera un grand écart dans la valeur de la vitesse calculée sur cette frontière. La raison pour laquelle le calcul ne parvient pas à amener la vitesse à la valeur constante qu'on doit y trouver doit être que le lissage de la courbe, autant celui fait au moment du calcul de la nouvelle position que celui fait au moment du maillage (dans Patran), ramène toujours la courbe à la même position à chaque pas de calcul. Les mêmes conditions de vitesse obtenues du calcul du système d'équations de Laplace réapparaissent donc à chaque itération. Pour obtenir un meilleur calcul de la forme de la surface libre, et éliminer cet effet, il aurait fallu utiliser un plus grand nombre de points de contrôle dans la courbe B-spline de lissage. Mais cela causait des instabilités dans le calcul, sous la forme d'ondulations dans la courbe. Ces ondulations avaient un effet catastrophique sur le calcul en faussant complètement les valeurs de la vitesse dans le calcul du champ de potentiel au pas suivant.

Cela montre à quel point la méthode de calcul est vulnérable, et comment les conditions locales au début du jet sont peu fiables pour déterminer la position de la surface libre. Le fait que le résultat global du calcul soit si probant montre par contre que celui-ci ne dépend pas dans une si large mesure de ces valeurs. Les facteurs de pondération qui sont associés à chaque nœud de la surface libre et qui permettent de contrôler la grandeur du déplacement de ces nœuds ont pour effet de réduire la possibilité de variation locale des vitesses au début de la surface libre.

L'inexactitude des résultats au début de la surface libre amène donc à douter de la valeur de la position de convergence de cette surface libre. Et, à la lumière de ce qui précède, il manque en fait une explication à la qualité du résultat obtenu ici. Il aurait fallu répéter le calcul avec des géométries différentes pour s'assurer de la valeur réelle de la méthode.

Il faut noter cependant que les conditions en début de jet sont, dans cette géométrie de validation, particulièrement difficiles. Les calculs de turbine n'offriront pas ces "coins" dans le domaine d'écoulement qui occasionnent de tels gradients de vitesse. Et les valeurs de vitesse en début de surface libre seront beaucoup plus fiables. Chan et Larock, qui ont fait le même calcul, ne donnent pas de détails sur cet aspect de leurs résultats dans les ouvrages consultés.

Sur l'ensemble de la longueur de la surface libre, la vitesse demeure d'ailleurs assez éloignée de la vitesse de référence (i.-e. la vitesse au premier nœud de la surface libre), comme on peut le voir sur la figure 6.19. Ici encore, la convergence est immédiate et les résultats ne tendent pas à s'améliorer au-delà d'une certaine limite.

Ensuite, il faut noter qu'un trop grand nombre d'itérations amène de l'instabilité dans le calcul. On peut le voir, d'une part, par l'apparition d'ondulation dans la courbe de la surface libre après quelques pas de calcul, et d'autre part, par une perte de précision sur la valeur du coefficient de contraction (fig. 6.18). Cela a obligé de restreindre le nombre de points de contrôle des courbes B-spline de lissage. En conséquence, si on a obtenu une bonne solution de la *position* de la surface libre, on n'a pas eu une solution précise de la *forme* de celle-ci.

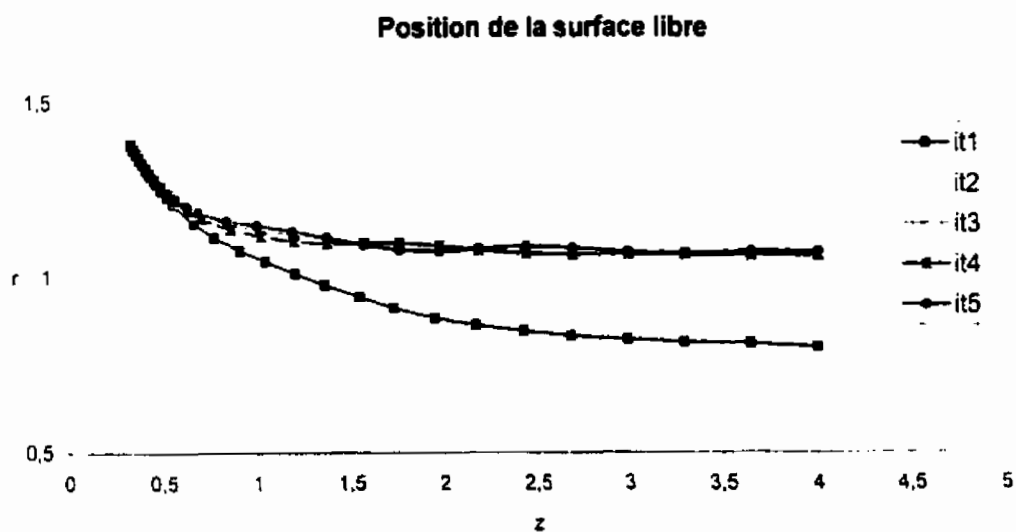


Figure 6.18 : Déplacements de la surface libre

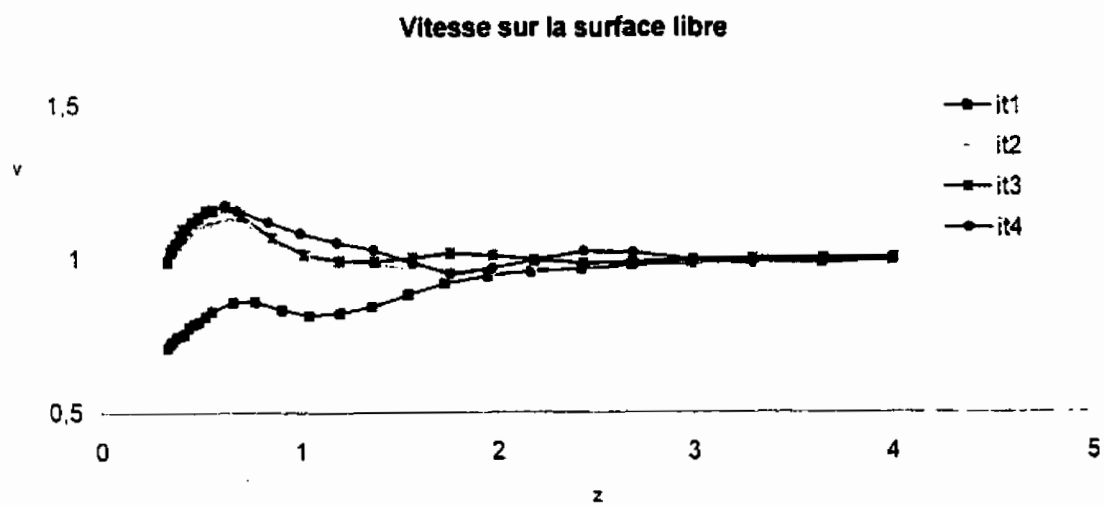


Figure 6.19 : Vitesse sur la surface libre

La principale conclusion de ce test est peut-être que le critère de vitesse uniforme sur la surface libre apparaît comme un critère de convergence peu efficace, en raison de l'instabilité qu'engendrent des itérations répétées. La rapidité de la convergence fait qu'il sera plus approprié de se baser sur la valeur du déplacement de la surface libre (surtout à l'extrémité du jet) pour piloter ce calcul. Les valeurs de vitesse près de l'embouchure montrent en effet une grande sensibilité à de faibles déplacements de la surface libre. Mais la valeur exacte de ces vitesses est de moindre importance, puisque cet endroit est, en fin de compte une zone très localisée d'accélération du fluide. C'est plutôt la forme globale du jet qu'on désire obtenir ici, puisque celle-ci aura une influence déterminante sur l'ensemble du champ de vitesse dans la turbine. Donc, on peut conclure que, en contrepartie de la difficulté d'obtenir des valeurs précises de la vitesse près de la surface libre et de la forme exacte que prend cette surface libre, la détermination de la position de la surface libre qu'on obtient de cette méthode de calcul demeure, elle, suffisamment précise.

6.4 CALCUL D'UNE TURBINE SIMPLIFIÉE

6.4.1 CALCULS EFFECTUÉS

Le dernier calcul consistait à réunir tous les aspects de la méthode de calcul développée ici dans une géométrie approchant le plus possible celle d'une turbine Banki réelle.

Comme nous l'avons vu aux sections 3.3 et 4.3.3, en raison des limitations de la méthode de calcul et de la nécessité de restreindre la complexité du problème, la géométrie de la turbine sera finalement une version assez grossière de la turbine réelle.

La géométrie utilisée ici est inspirée des travaux de Khosrowpanah, Fiuizat et Albertson [21, 22]. Ceux-ci ont construit un modèle simple de turbine expérimentale, dans le but de faire des tests paramétriques et d'évaluer les facteurs influençant la performance de la machine. Le modèle qui est montré à la figure 6.20, et qui a servi de base aux calculs qui suivent, respecte le dessin de cette turbine expérimentale.

6.4.1.1 Simplifications du modèle

Les simplifications de la géométrie réelle de la turbine qui ont été faites pour mener au modèle géométrique du calcul sont nombreuses, puisque qu'une seule aube a été retenue pour faire le calcul. La tuyère est cependant restée la même que dans la turbine réelle. Les justifications de ces simplifications sont les suivantes.

D'abord, dans une turbine réelle, l'eau traverse deux fois l'aubage, en passant par le centre de la roue. Ce double passage n'a pas été tenté ici. À la section 3.1.2.2, on a présenté une expression de la vitesse le long de la surface libre dans la roue, qui ne retenait qu'un seul passage à travers l'aubage. Une expression tenant compte d'une seconde traversée dans l'aubage aurait demandé des hypothèses supplémentaires qu'on n'a pas voulu faire ici. C'est ainsi que pour simplifier le calcul du terme de transfert d'énergie au fluide dans l'équation de Bernoulli, il a fallu aussi simplifier le modèle de turbine auquel ce modèle est applicable.

L'autre raison majeure qui a forcé la limitation du calcul à une seule aube est un problème strictement géométrique à la mise en œuvre du déplacement itératif de la surface libre. La présence de plusieurs aubes augmente en effet la possibilité qu'une des surfaces libres du jet puisse en venir à se superposer à une aube au cours du calcul. Une telle circonstance aurait demandé une reconstruction majeure de la structure du maillage autour de cet obstacle, et une réécriture du fichier des commandes de dessin, pour pouvoir passer au pas de calcul suivant. L'avantage d'automatisation du calcul que permettait ce fichier de commande aurait disparu. De toute façon, à partir du moment où le second passage dans l'aubage était exclu du calcul, il n'y avait plus grand avantage à utiliser plus d'une aube. L'effort requis pour réaliser un calcul avec plus d'une aube aurait en effet été important, et les bénéfices moindres.

La réduction du nombre d'aubes dans le modèle géométrique à une seule amène une différence importante par rapport à la turbine qui l'a inspiré, mais qui n'est pas aussi drastique qu'il peut paraître à première vue. Le modèle d'une seule aube à l'intérieur du jet ne représente pas une turbine d'une seule aube, mais plutôt une turbine dont le nombre d'aube est suffisamment petit pour qu'il n'y ait qu'une seule aube à la fois à l'intérieur du jet. Les turbines fabriquées pour l'étude de Khosrowpanah et al. [21, 22] comptaient entre 10 et 20 aubes. En fonction de la largeur du jet, la présence d'une seule aube correspond en fait, approximativement, à une turbine constituée de 10 aubes. Cette affirmation vient du calcul suivant: en notant θ_1 l'angle de la circonférence de la roue sous-tendu par la tuyère, une roue pour laquelle on ne trouverait qu'une seule aube à l'intérieur de cette portion de la circonférence aurait un nombre maximum d'aubes donné par :

$$n \approx \frac{2\pi}{\theta_1} \quad (6.16)$$

Le modèle dessiné ici ayant une ouverture θ_1 de 58°, il n'aurait pas plus de 12 aubes. Cependant, il faut aussi compter que si le bord extérieur d'une aube ne se trouve pas vis-à-vis l'ouverture de la tuyère, celle-ci peut quand même être frappée par le jet. Cette circonstance limite grandement la possibilité de comparer les résultats du présent calcul avec des données expérimentales. Le modèle utilisé dans le présent calcul est montré à la figure 6.22.

6.4.1.2 Géométrie de l'aube

La géométrie de l'aube utilisée ici correspond à celle adoptée par Khosrowpanah et al. Elle est formée d'une section d'un tube cylindrique dont les bords sont complètement arrondis. Le détail de la géométrie de l'aube est montré à la figure 6.21. C'est le genre d'aube qui pourrait être adoptée dans une installation typique de la turbine Banki, où la construction de la turbine est simplifiée au maximum. Elle ne vise pas à correspondre à une géométrie optimale de l'aube.

L'aube est placée à peu près au centre de l'ouverture de la tuyère, de manière à ce qu'elle soit le plus éloignée possible des surfaces libres du jet. On évite ainsi la possibilité que les courbes des surfaces libres ne croisent l'aube durant le calcul.

Une discontinuité du domaine issu de l'aube est obtenue en créant une ligne partant du bord aval de l'aube et se terminant au centre de la section de sortie du jet. Les surfaces sur lesquelles seront définis les éléments seront tracées de part et d'autre de cette ligne.

6.4.1.3 Position initiale du jet

La position initiale du jet est obtenue à partir de deux courbes B-spline issues des bords de la tuyère et placées presque aléatoirement dans l'espace. Trois règles ont quand même été suivies pour déterminer l'emplacement initial du jet.

D'abord, près de la sortie de la tuyère, la surface libre est tracée parallèlement aux parois de la conduite. On cherche ici à assurer des conditions lisses au début de la surface libre.

Ensuite, les deux surfaces du jet se terminent par les courbes parallèles. On suppose que le jet est alors entièrement formé et que la vitesse y est constante et uniforme. Des surfaces libres qui ne seraient pas parallèles entraîneraient une accélération ou une décélération du fluide à cet endroit.

Enfin, le jet est construit sur une longueur d'environ une fois la largeur de l'ouverture de la tuyère et de 4 fois la largeur de l'aube. Il s'est agi ici d'établir un compromis entre la possibilité d'obtenir un jet complètement formé, la nécessité de minimiser le nombre de points de calcul, et

celle de réduire la longueur des courbes à lisser. Le bout du jet doit être suffisamment éloigné à la fois de la tuyère et de l'aube.

6.4.1.4 Partition du domaine de calcul

La partition du domaine de calcul en éléments triangulaires à 6 nœuds est montrée à la figure 6.24.

Le maillage est plus serré près des bords de la tuyère, de même qu'autour de l'aube. Cette configuration des points de calcul est obtenue d'une première division du domaine en surfaces, qui sont, elles, divisées automatiquement en éléments par le progiciel Patran. Ces surfaces sont montrées à la figure 6.23.

La création des surfaces est refaite à chaque itération, par l'utilisation d'un fichier de commandes Patran. Les commandes sont écrites de manière à ce que les proportions des éléments demeurent régulières (sans angles exagérément aigus ou obtus), malgré la déformation du domaine de calcul résultant du déplacement des surfaces libres du jet.

À ce maillage, les éléments suivants sont ajoutés pour imposer les conditions aux limites dans le système d'équations matricielles à résoudre :

- des éléments linéaires à 3 nœuds servant à imposer une vitesse à la sortie. Puisque la section de sortie change à chaque pas de calcul, une vitesse différente est imposée à chaque fois. Elle est calculée de manière à imposer un débit constant.
- des éléments linéaires à 3 nœuds disposés sur le contour de l'aube, servant à imposer la vitesse de déplacement de ces parois. Celle-ci est calculée pour chaque nœud en fonction de la vitesse de rotation de la roue dont l'aube fait partie.
- des éléments-ressorts à 2 nœuds disposés à travers la discontinuité issue de l'aube, servant à imposer la circulation dans l'écoulement.

La turbine construite ici a un rotor d'un diamètre extérieur de 12 po et un rapport du diamètre intérieur au diamètre extérieur de 0,68. L'embouchure de la tuyère couvre 58° sur la

circonférence du rotor. Le calcul a été fait pour une vitesse de rotation de 15 rad/s (143.2 RPM), avec un débit de 1,44 pi³/s.

Ces conditions correspondent à un des tests de Khosrowpanah et al. [22]. Pour cette turbine, le rendement optimal était toutefois obtenue à 210 RPM. C'est cette vitesse qu'il aurait été préférable d'utiliser ici, puisqu'elle devrait mieux correspondre aux conditions d'entrée sans choc dans l'aubage qui ont été postulées dans le présent modèle (pour assurer l'absence de zones d'écoulement secondaire). Ce calcul s'est cependant avéré plus difficile : l'importance du terme de travail dans l'équation de Bernoulli amenant des courbures plus importantes de la surface libre et nuisant ainsi à la convergence, qui n'a pas été atteinte dans ce cas.

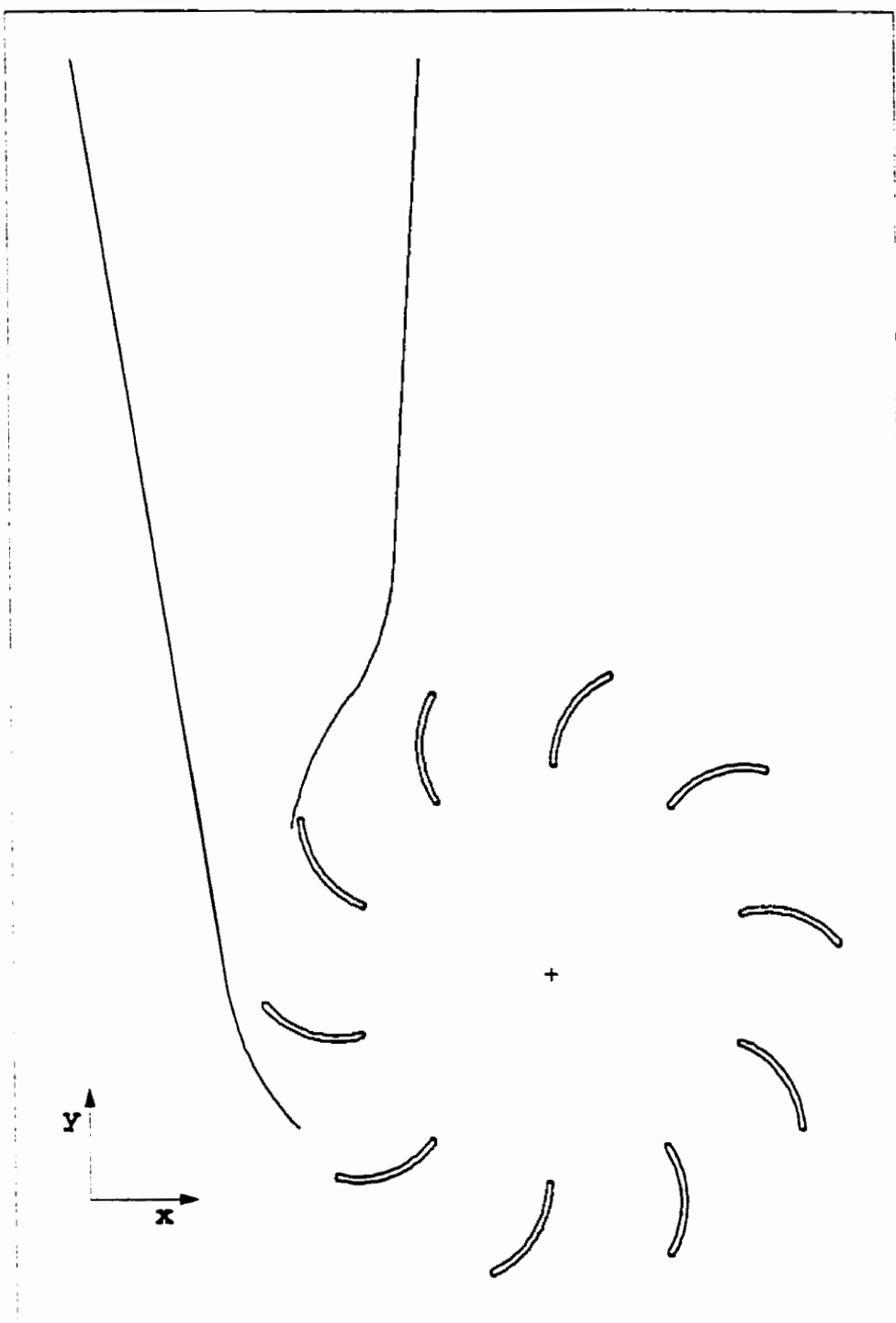


Figure 6.20 : Modèle de la turbine

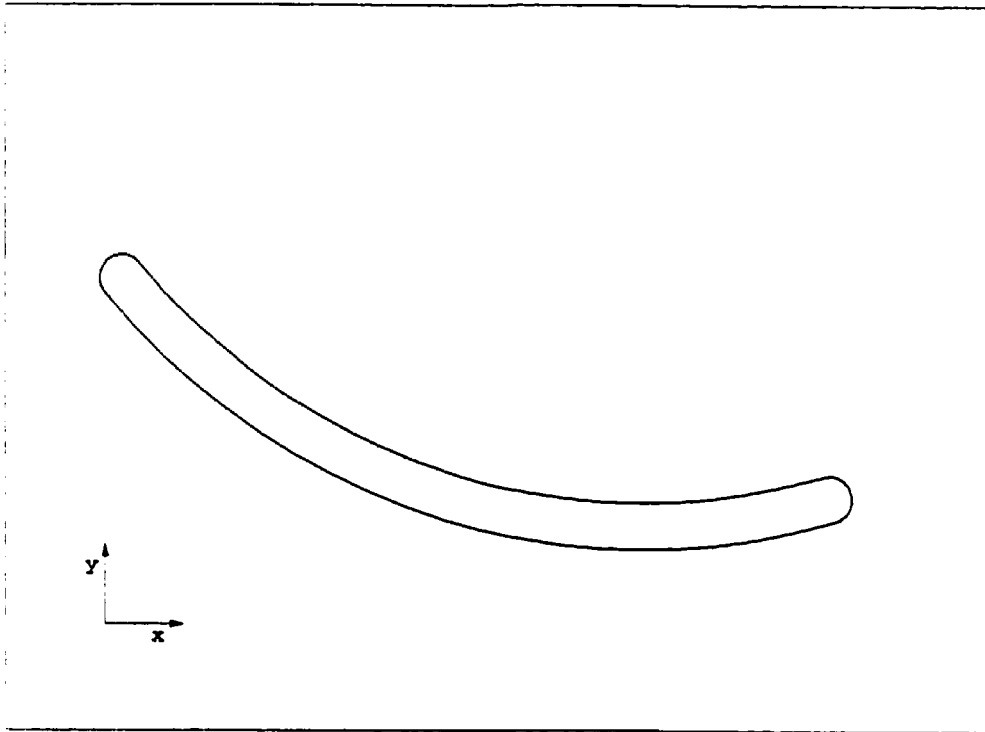
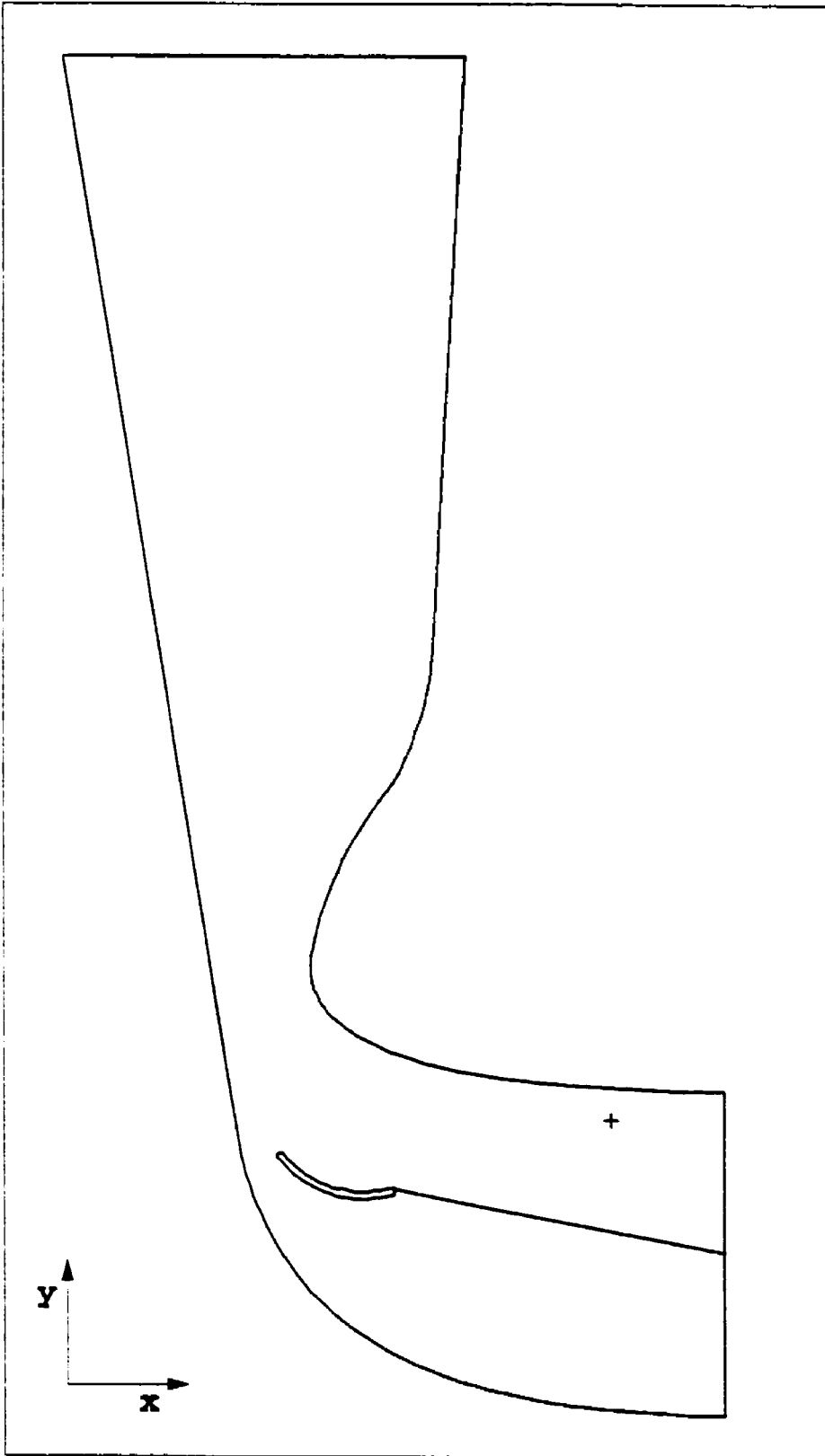


Figure 6.21 : Détail de la géométrie de l'aube



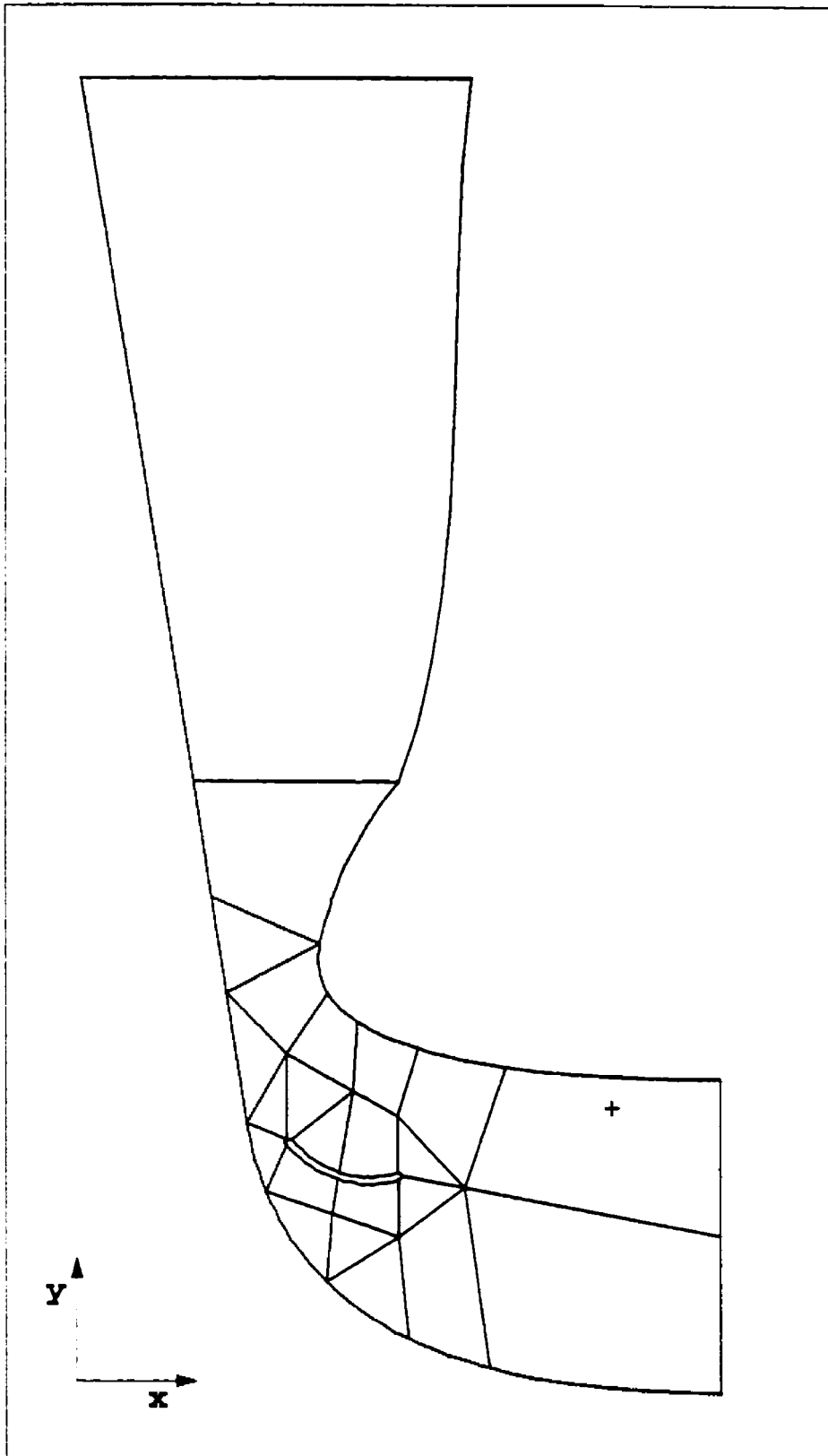


Figure 6.23 : Division du domaine de calcul en surfaces

6.4.2 RÉSULTATS

Le calcul a donné un résultat globalement cohérent, comme le montrent les séries de graphiques suivantes:

- les figures 6.24 à 6.29 montrent les déformations faites au maillage au cours du calcul.
- les figures 6.30 à 6.38 montrent le champ de vitesse à chaque pas de calcul et
- la figure 6.39 montre la géométrie finale obtenue pour le jet passant à travers l'aube en mouvement

La convergence du calcul s'est faite très rapidement comme dans le cas de l'orifice axisymétrique. On peut voir à ce sujet la figure 6.40, qui montre le déplacement des deux surfaces libres à chaque pas de calcul. La position initiale de la surface libre supérieure s'est avérée être très proche de celle de sa position finale, ce qui a facilité la convergence. Mais la surface libre inférieure a au contraire subi un déplacement plus important. Cela n'a pas empêché, là aussi, que la convergence soit rapide.

La principale difficulté de ce calcul est restée la grande différence entre la vitesse au début de chacune des surfaces libres (voir les deux graphiques de la figure 6.41). En l'absence de la turbine, et sous gravité nulle, les vitesses des deux surfaces libres auraient été les mêmes sur toutes leurs longueurs. Dans le cas présent, où l'aube subit le travail fait par le fluide et où la gravité est présente (mais, comme on le voit, en réalité négligeable), une différence doit apparaître entre les vitesses au début de chacune des deux surfaces du jet. C'est sur la base de ces deux vitesses que sont calculées les vitesses théoriques à chaque itération, et ainsi le déplacement des surfaces libres. La différence trouvée ici est toutefois beaucoup plus grande que ce qui est admissible en théorie. La vitesse au début de la surface libre supérieure est de près de quatre fois celle au début de la surface libre inférieure. La vitesse obtenue par éléments finis aux extrémités des surfaces libres est quant à elle forcément la même puisque c'est une condition aux limites imposée au calcul. L'écart de vitesse entre les deux débuts des surfaces libres qui résulte du calcul de l'écoulement, combiné à

l'égalité obligée des vitesses aux deux extrémités, fait que les vitesses le long des surfaces du jet ne respectent que grossièrement l'équation de Bernoulli, même lorsque la surface libre converge vers une position stable. On le voit sur la figure 6.41, dans l'écart entre les valeurs de vitesse calculées numériquement et la vitesse théorique obtenue de l'équation de Bernoulli, sur la base de la vitesse au début de la surface libre.

Cet effet est possiblement dû, d'une part, au fait que la surface libre supérieure montre une courbure plus accentuée près de l'embouchure, ce qui accélère le fluide à cet endroit. D'autre part, la position de l'aube par rapport à la tuyère fait que même si celle-ci est placée au centre de l'arc sous-tendu par l'embouchure, la section du passage sous l'aube est plus petite. Cela crée un obstacle plus grand à l'écoulement dans la partie inférieure, d'où les vitesses moins grandes. Cela montre la faiblesse du modèle de régime stationnaire utilisé ici. L'influence de la position de l'aube sur l'écoulement est bien réelle, alors qu'elle contredit justement ce modèle.

Rappelons toutefois que, comme l'a montré le calcul de l'orifice axisymétrique, les écarts de vitesse influencent peu la position de la surface libre. Donc, malgré ces imprécisions sur la vitesse, la position de la surface libre obtenue ici peut être considérée comme un résultat fiable, à l'intérieur du modèle d'écoulement retenu pour ce calcul.

Les valeurs locales de la vitesse autour de l'aube sont montrées à la figure 6.42, où les vitesses sont tracées en fonction de l'arc sous-tendu par l'aube. La figure 6.43 montre quant à elle les valeurs correspondantes du coefficient de pression. Ce résultat n'apparaît pas très probant à première vue. En effet, l'écart de la grandeur des vitesses entre les côtés intrados et extrados n'est pas marqué comme on s'attendrait d'un corps générateur de portance, et comme on l'a vu avec le profilé Joukowski (figure 6.14). La vitesse devient même plus faible du côté extrados que du côté intrados dans la partie aval de l'aube. La situation est la même, mais à l'inverse, pour la pression. Mais l'effet que montre ce graphique est, en réalité, que la poussée est mal répartie sur l'aube. Bien qu'il y ait une poussée réelle sur l'aube, celle-ci est administrée sur la partie amont de l'aube, alors que la partie aval subit en fait une poussée inverse. Cet effet montre l'inefficacité du modèle d'aube choisi pour ce calcul (modèle qui est d'ailleurs semblable à des modèles souvent utilisés en pratique.)

Notons qu'il ne faut pas non plus condamner la valeur de ce modèle d'aube sur la seule foi de ce résultat. En effet, l'aube doit aussi pouvoir agir efficacement lors de son second passage dans le jet, au cours duquel l'écoulement se fait dans le sens inverse. C'est pour cette raison que l'aube est conçue avec la symétrie qu'elle a. Pour évaluer correctement l'efficacité de l'aube, il faudrait réussir un calcul qui englobe la totalité du passage de l'aube dans le jet. Ceci devrait ainsi inclure le passage face à la tuyère et l'ensemble du retournement de l'aube à travers le jet (dans le cas où l'aube reste constamment mouillée). On a expliqué plus haut pourquoi ce calcul n'était pas possible dans le cadre de ce travail.

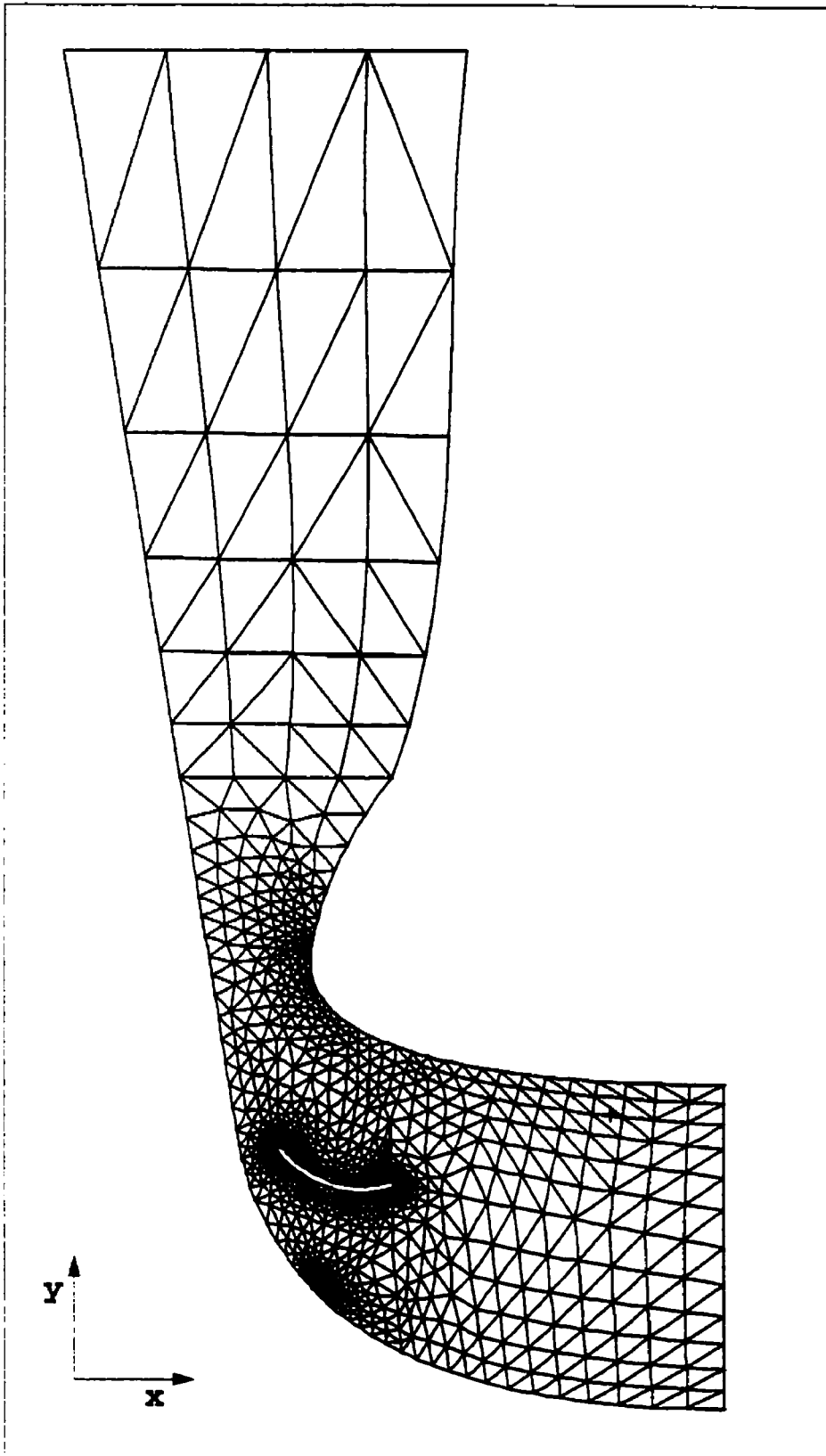


Figure 6.24 : Maillage initial (turbine simplifiée)

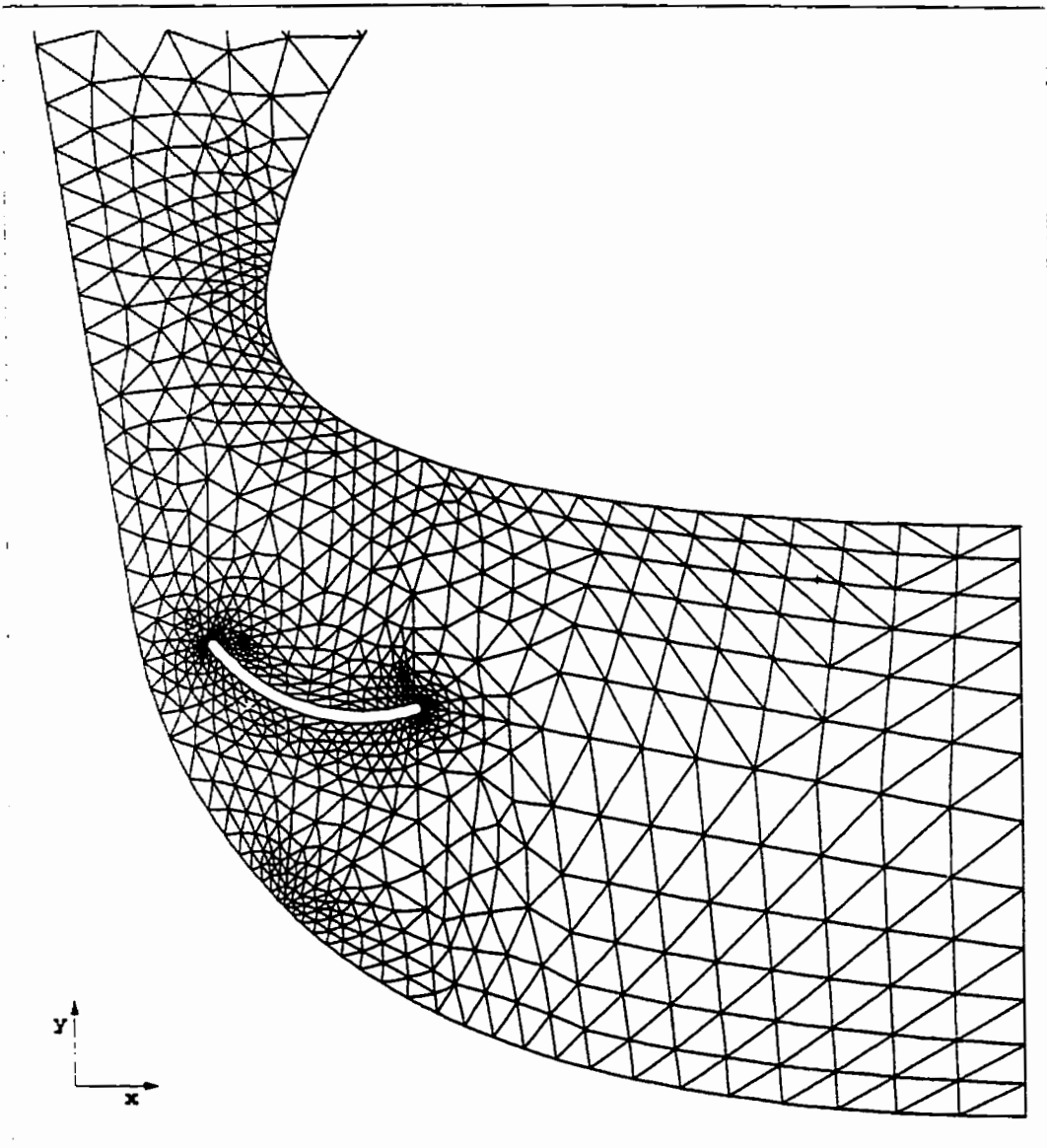


Figure 6.25 : Maillage initial (turbine simplifiée)

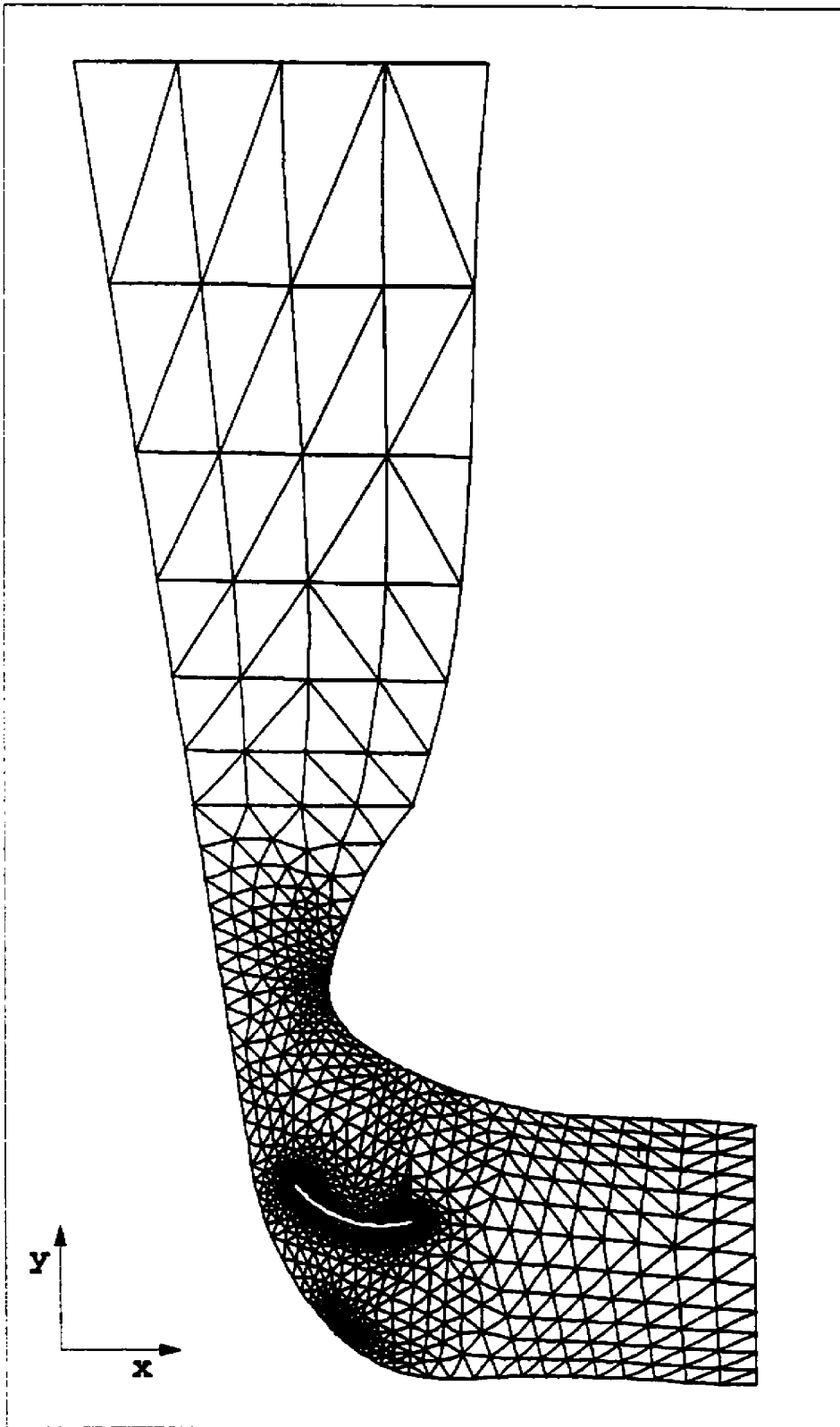


Figure 6.26 : Maillage, première itération (turbine simplifiée)

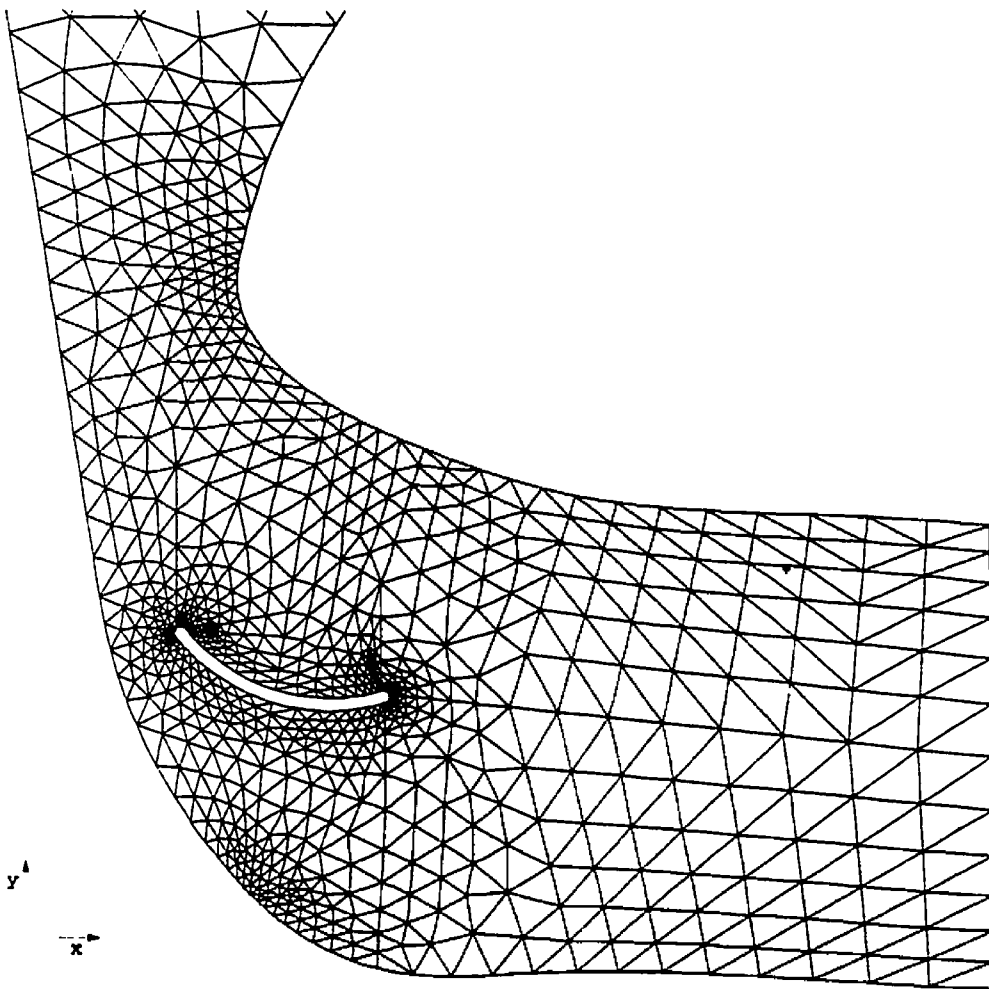


Figure 6.27 : Maillage, première itération (turbine simplifiée)

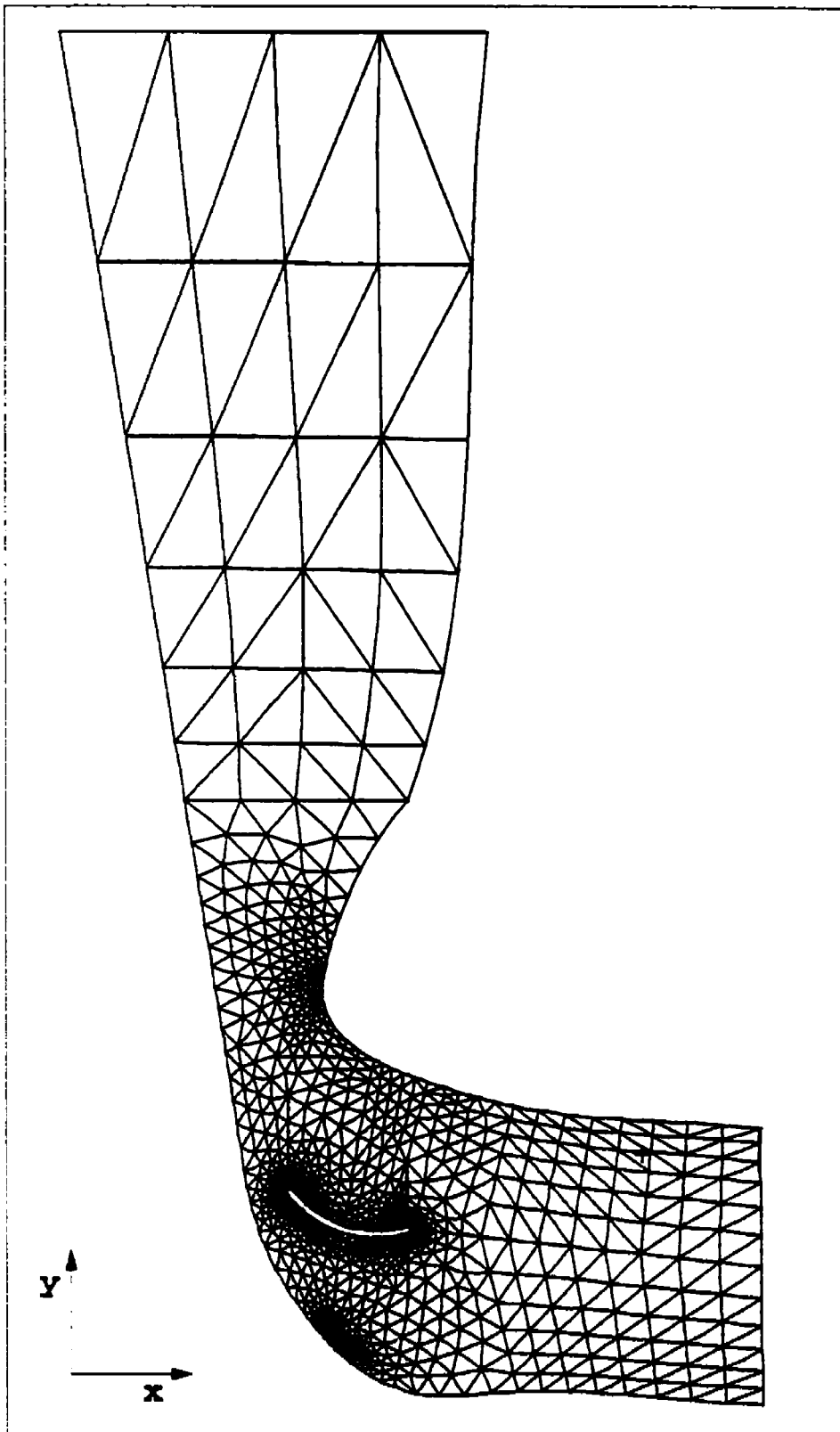


Figure 6.28 : Maillage, deuxième itération (turbine simplifiée)

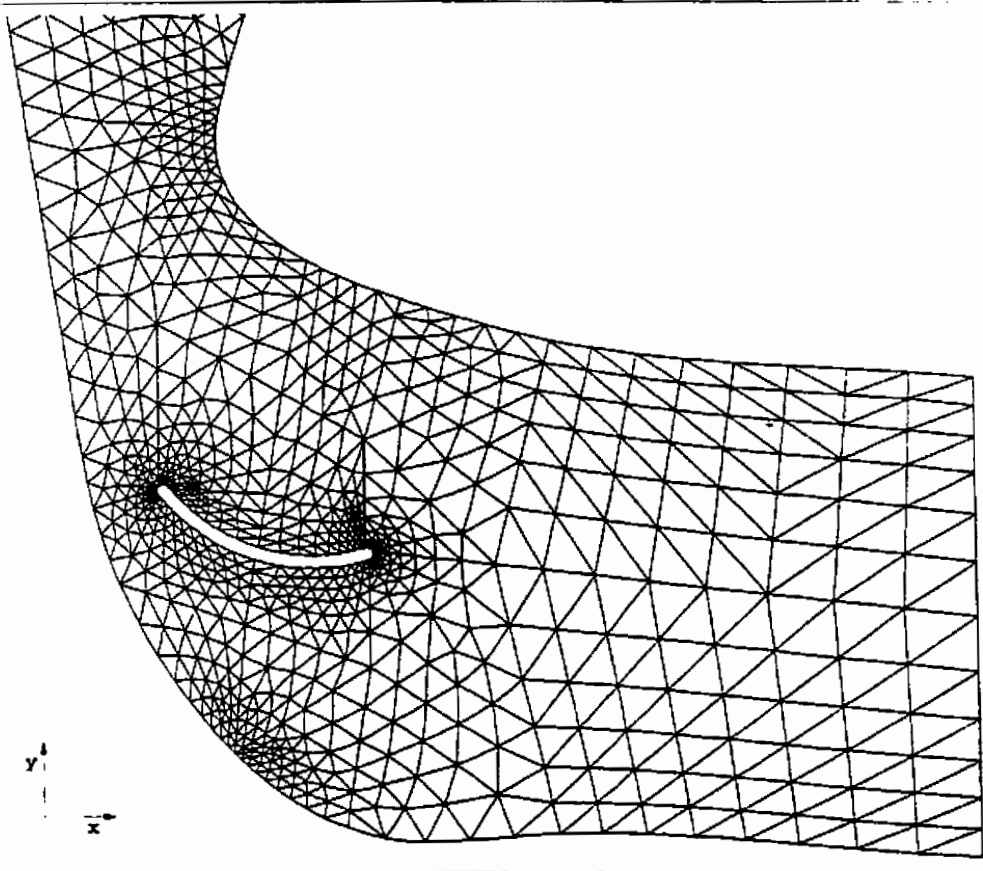


Figure 6.29 : Maillage, deuxième itération (turbine simplifiée)

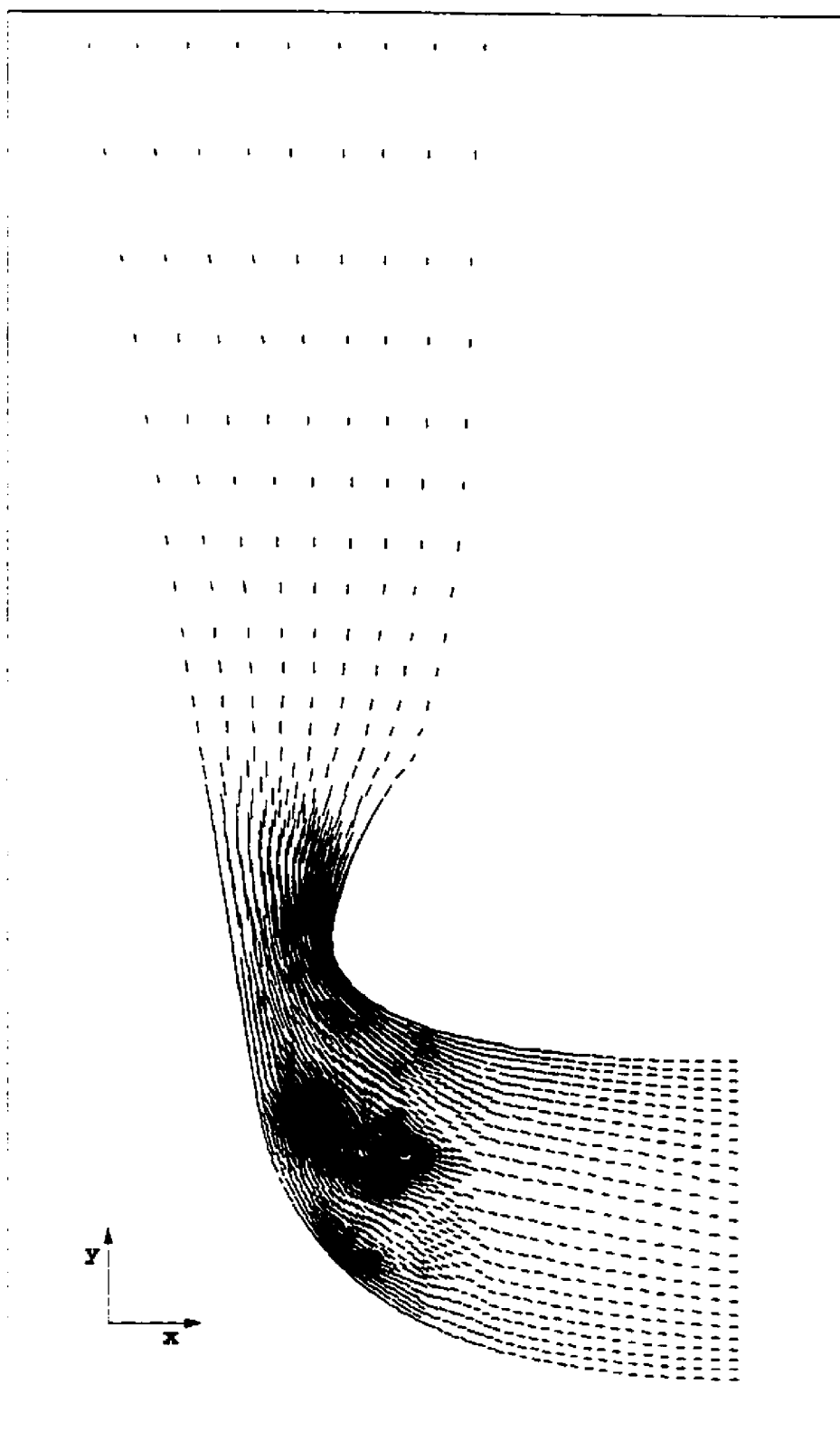


Figure 6.30 : Champ de vitesses, initial (turbine simplifiée)

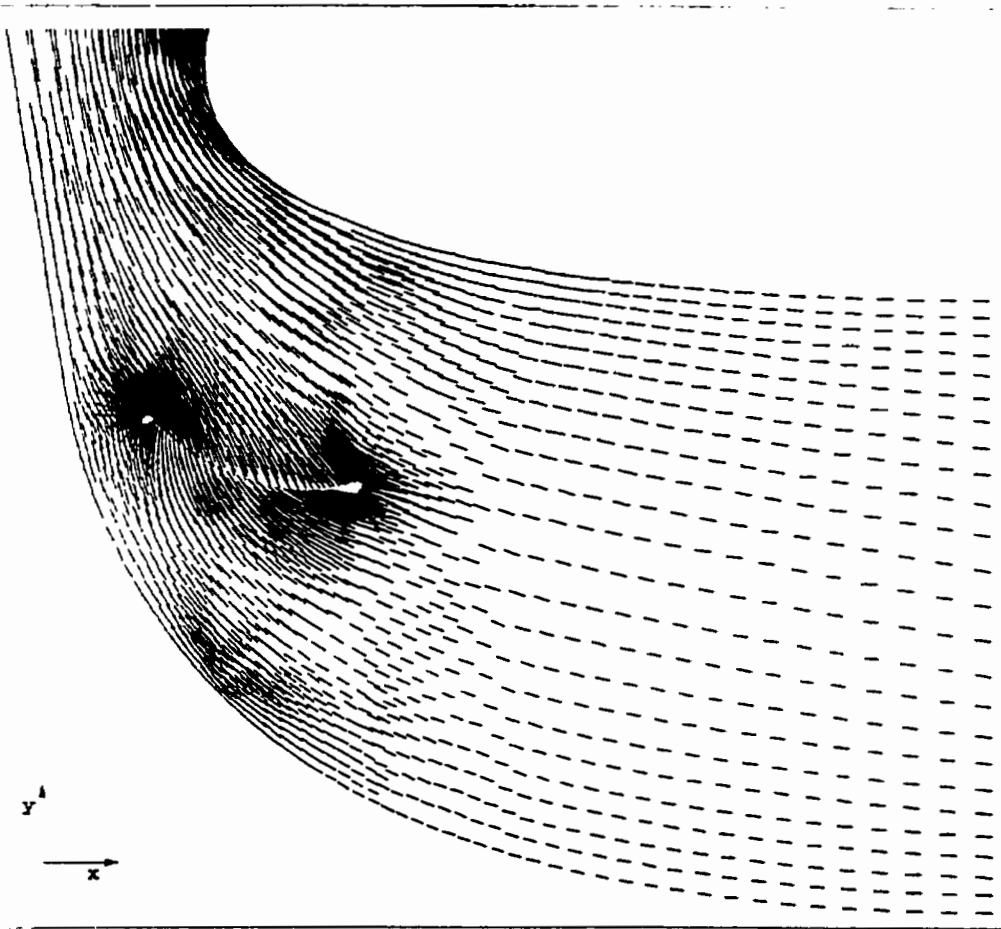


Figure 6.31 : Champ de vitesses, initial (turbine simplifiée)

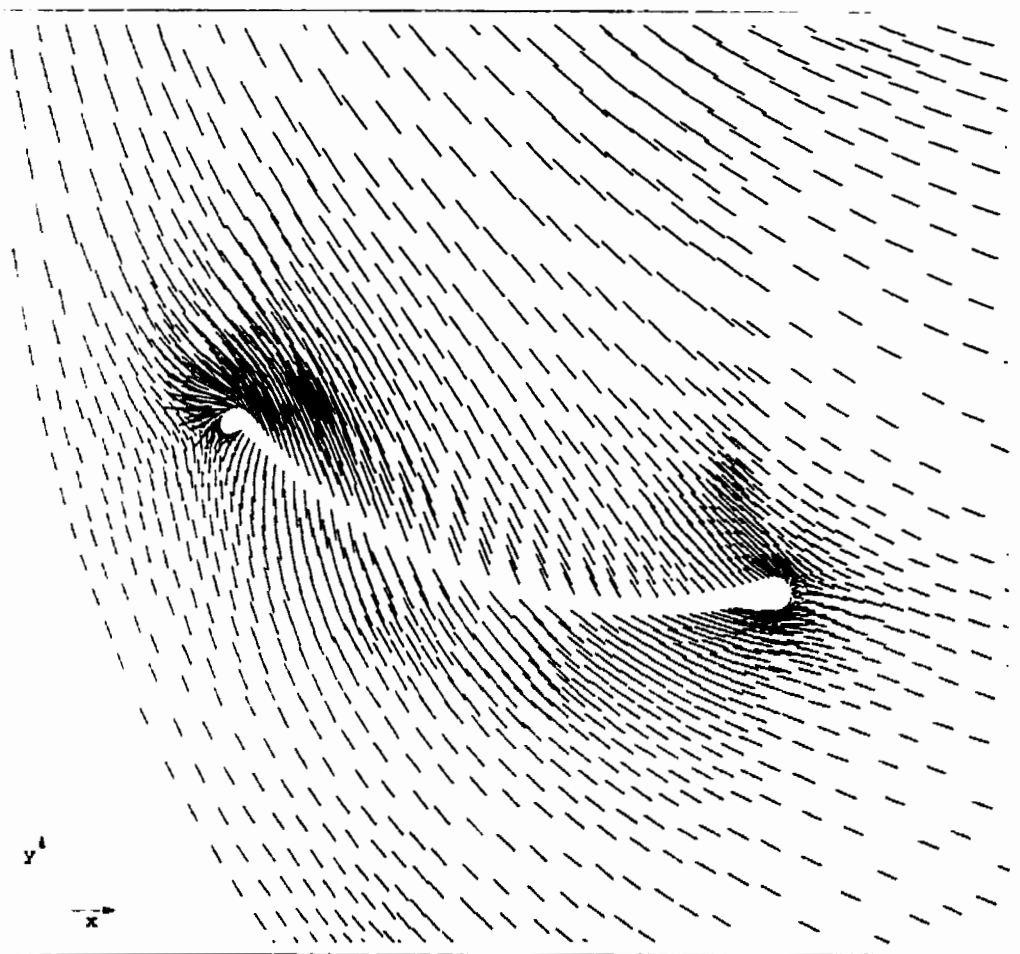


Figure 6.32 : Champ de vitesses, initial (turbine simplifiée)

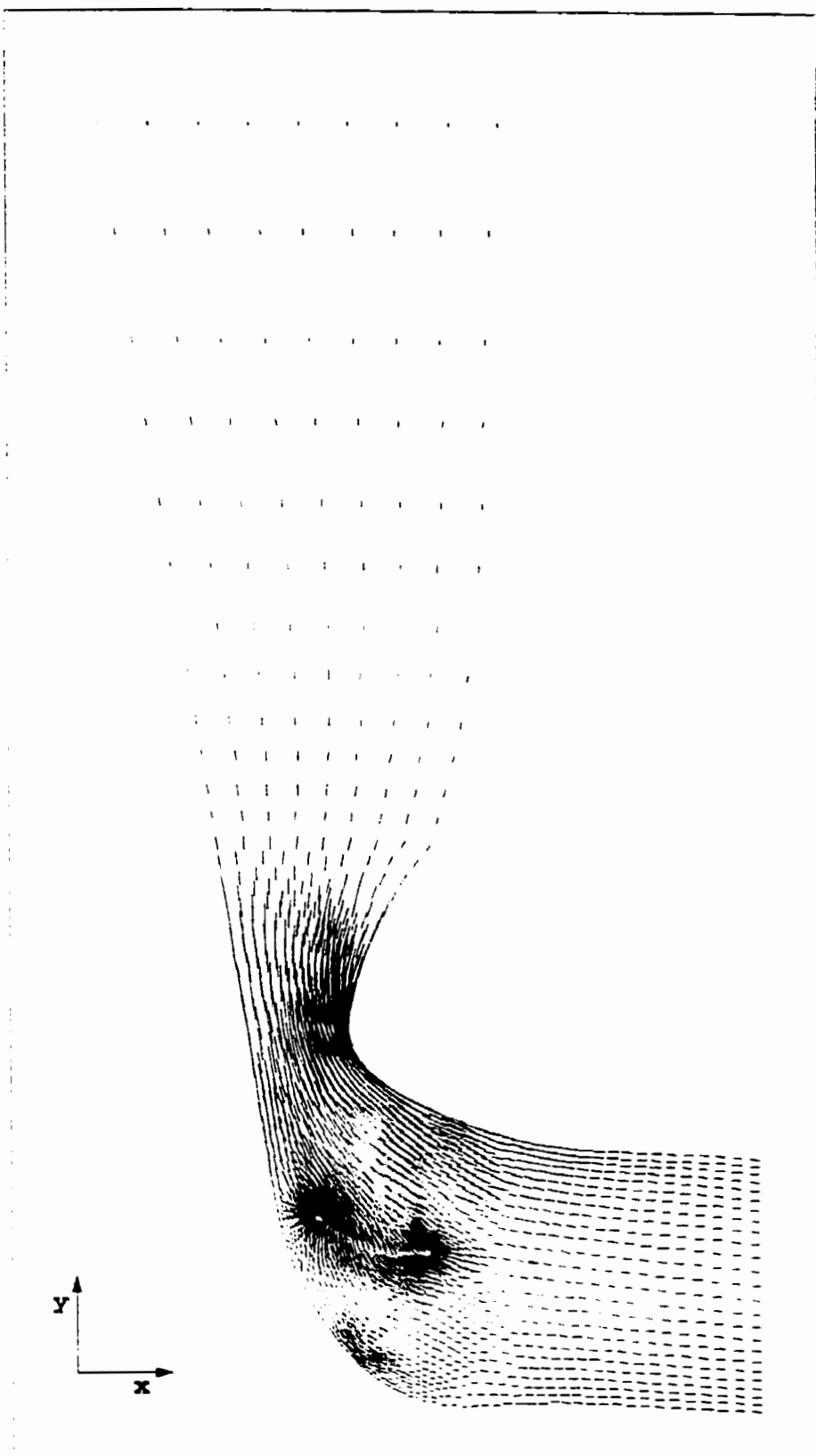


Figure 6.33 : Champ de vitesses, première itération (turbine simplifiée)

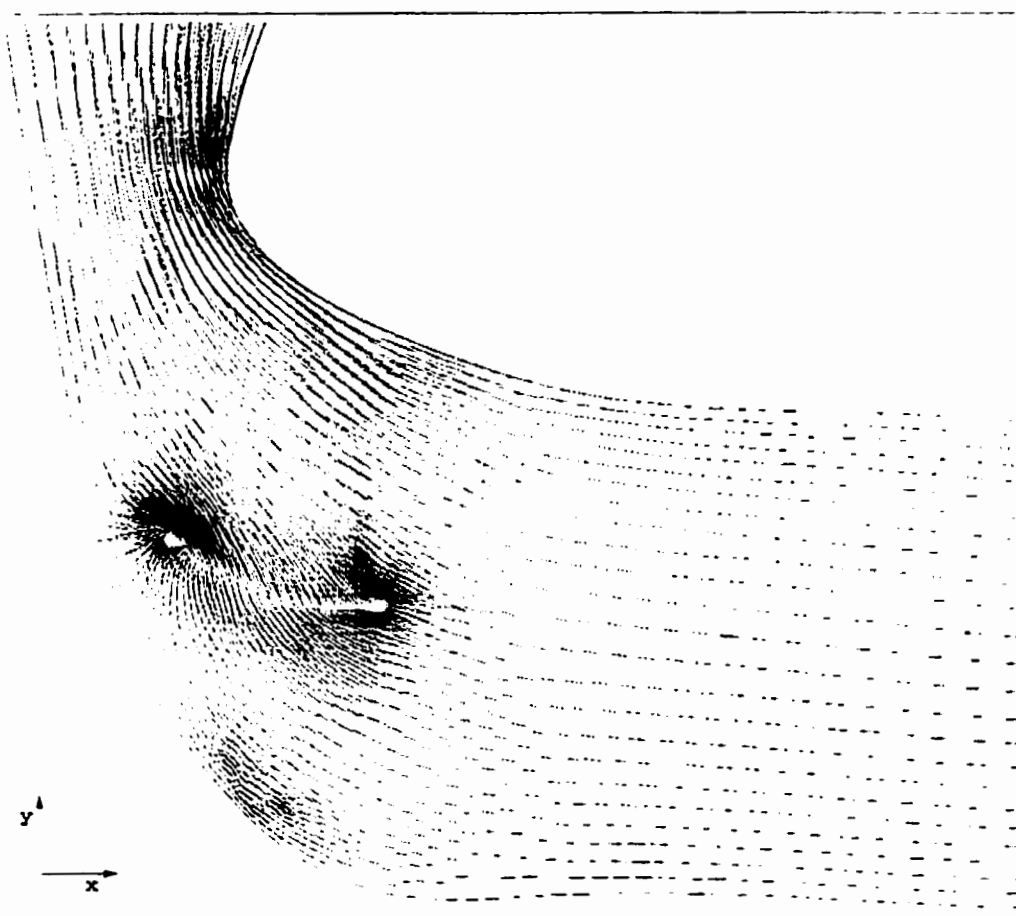


Figure 6.34 : Champ de vitesses, première itération (turbine simplifiée)

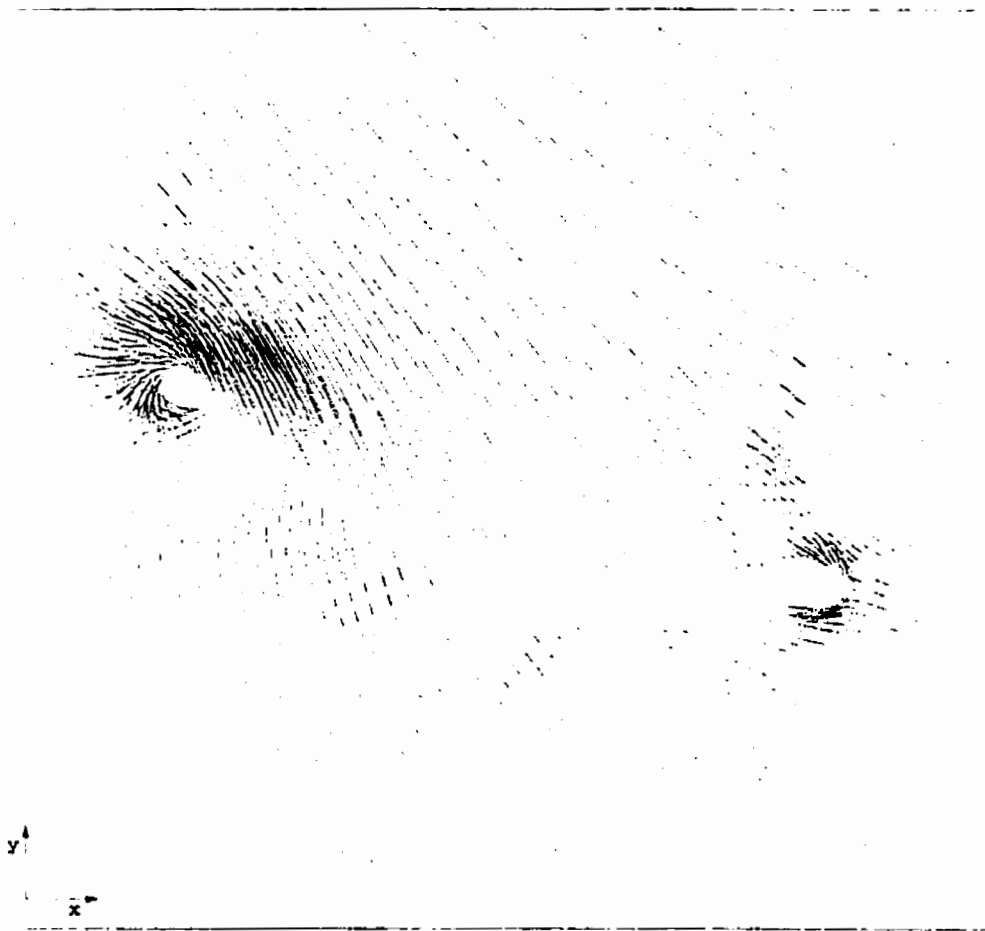


Figure 6.35 : Champ de vitesses, première itération (turbine simplifiée)

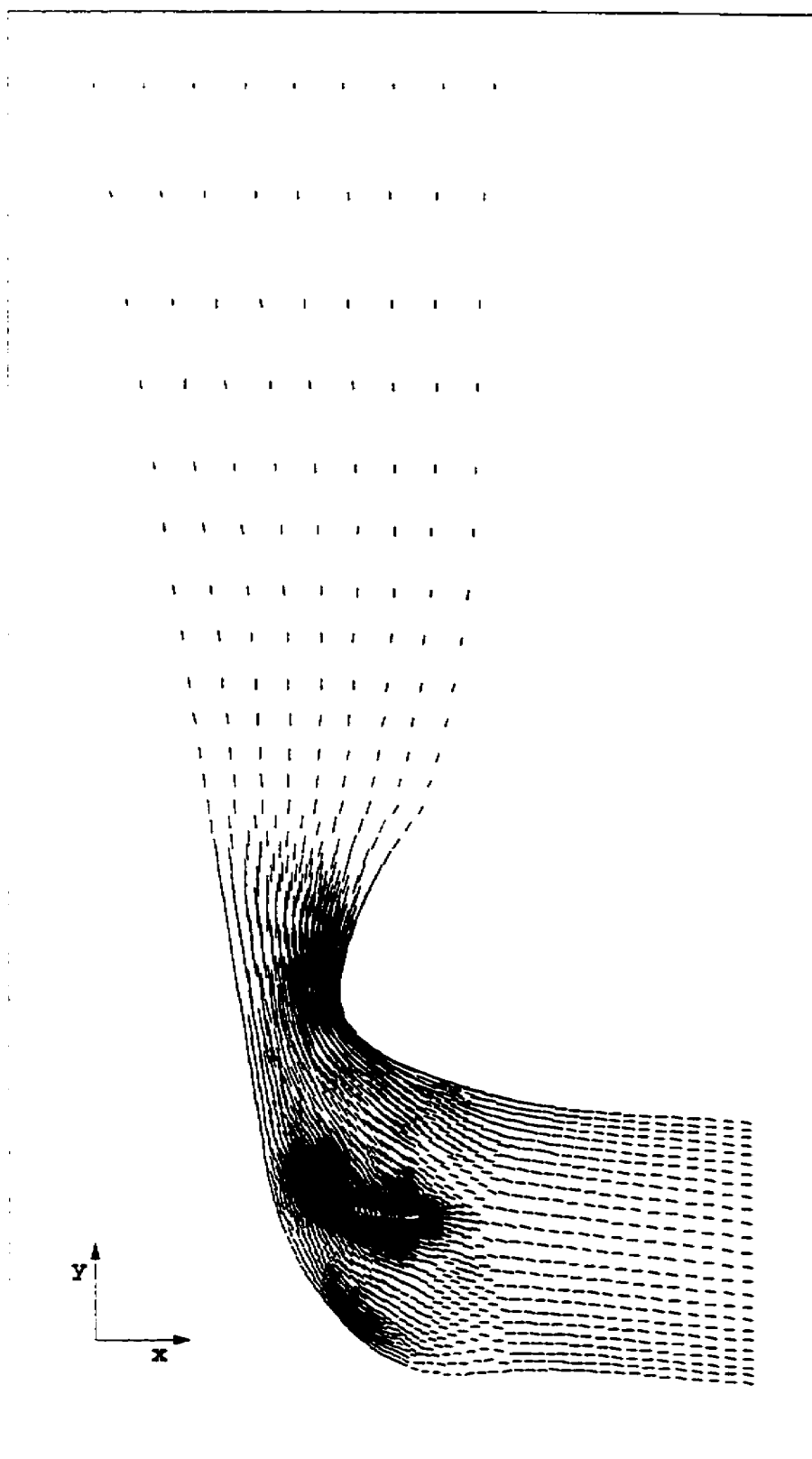


Figure 6.36 : Champ de vitesses, deuxième itération (turbine simplifiée)

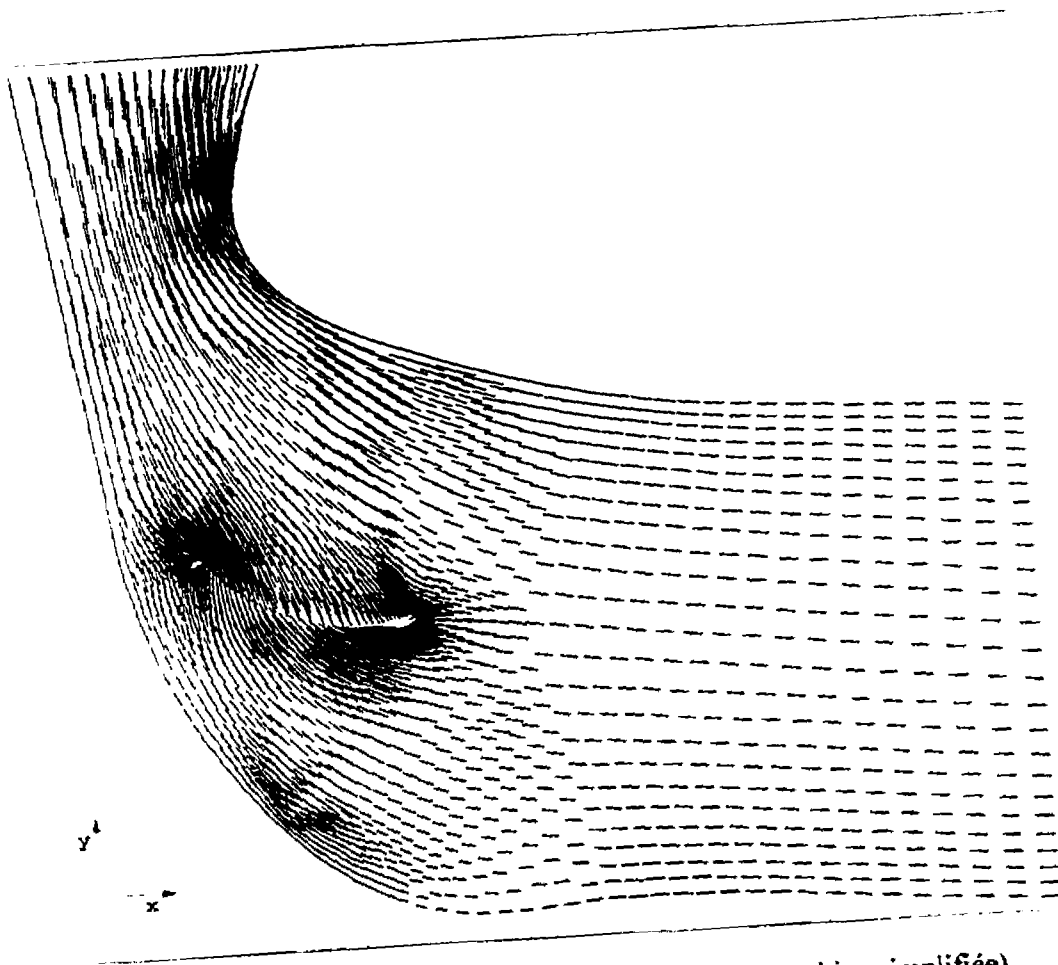


Figure 6.37 : Champ de vitesses, deuxième itération (turbine simplifiée)

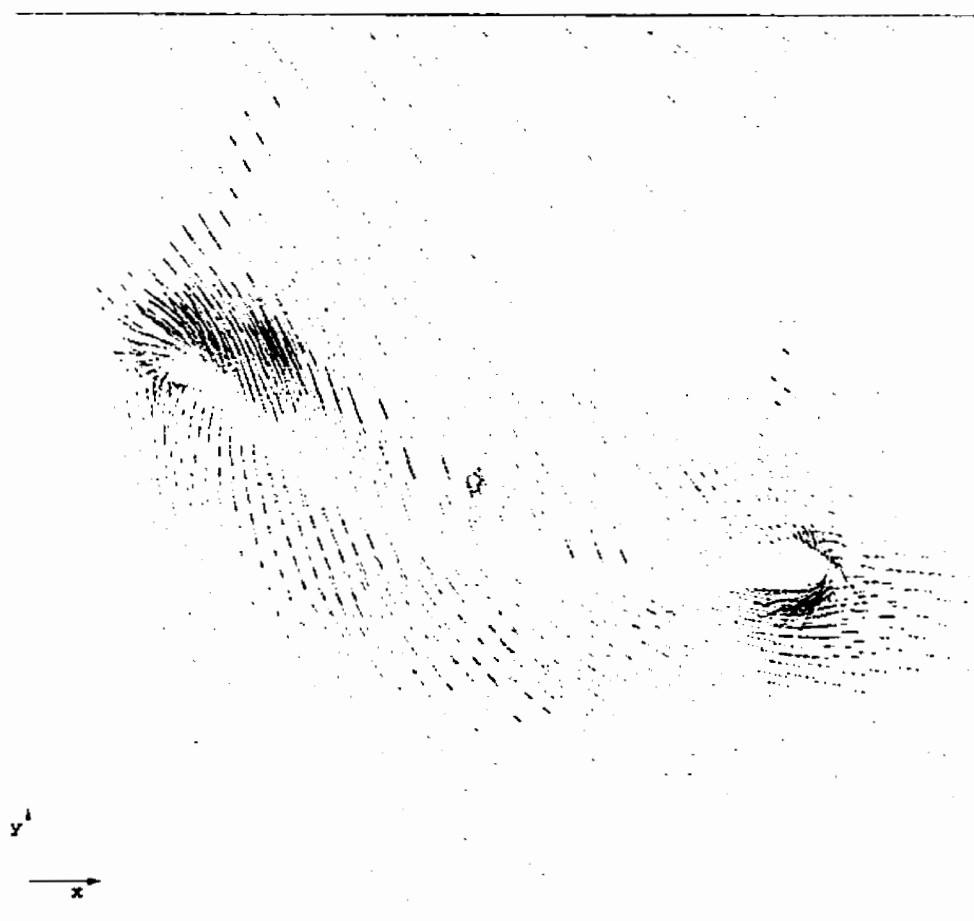


Figure 6.38 : Champ de vitesses, deuxième itération (turbine simplifiée)

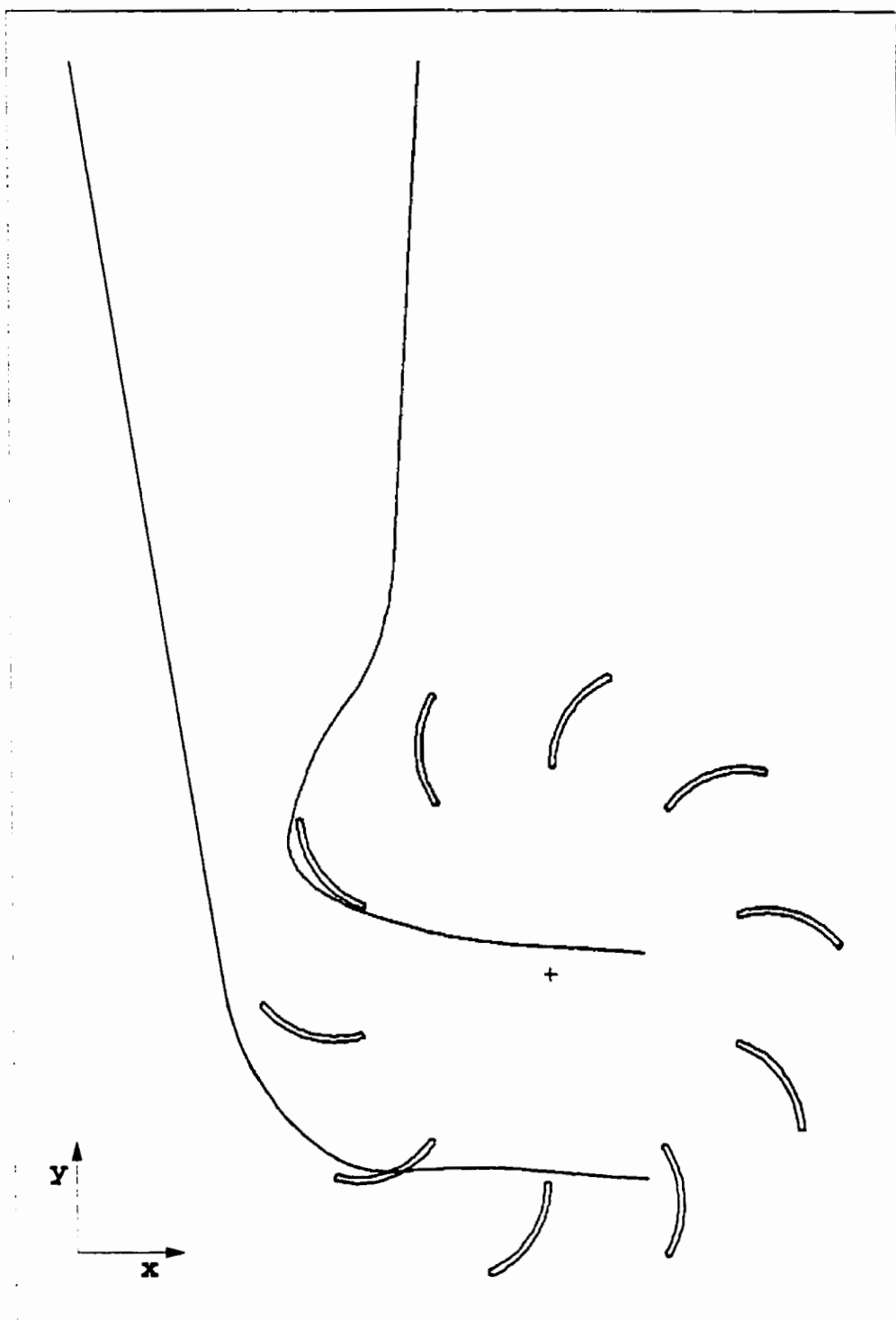


Figure 6.39 : Géométrie finale du jet dans la turbine

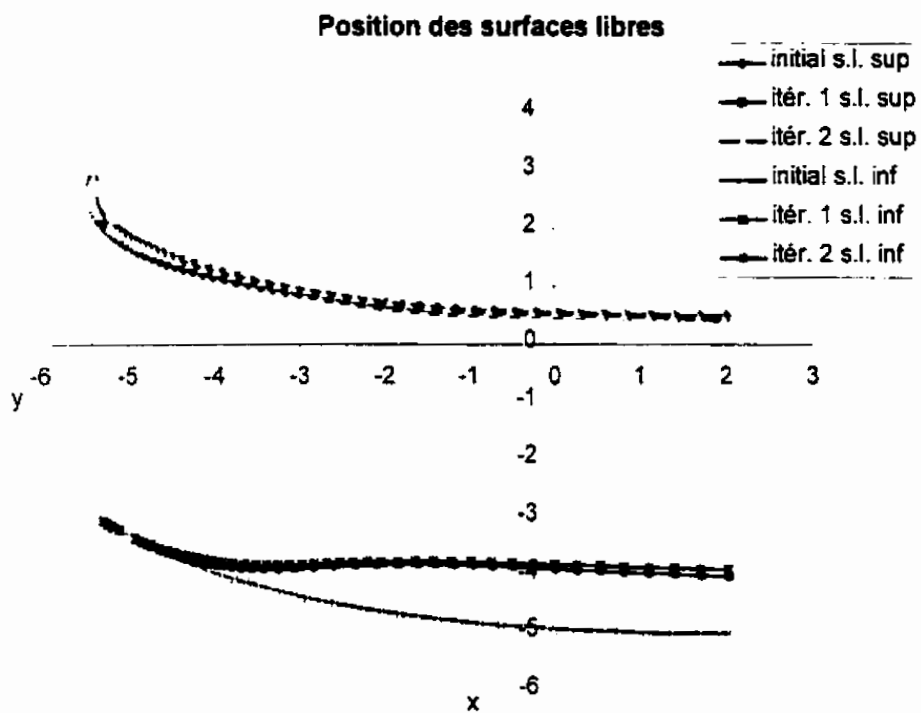


Figure 6.40 : Déplacements des surfaces libres

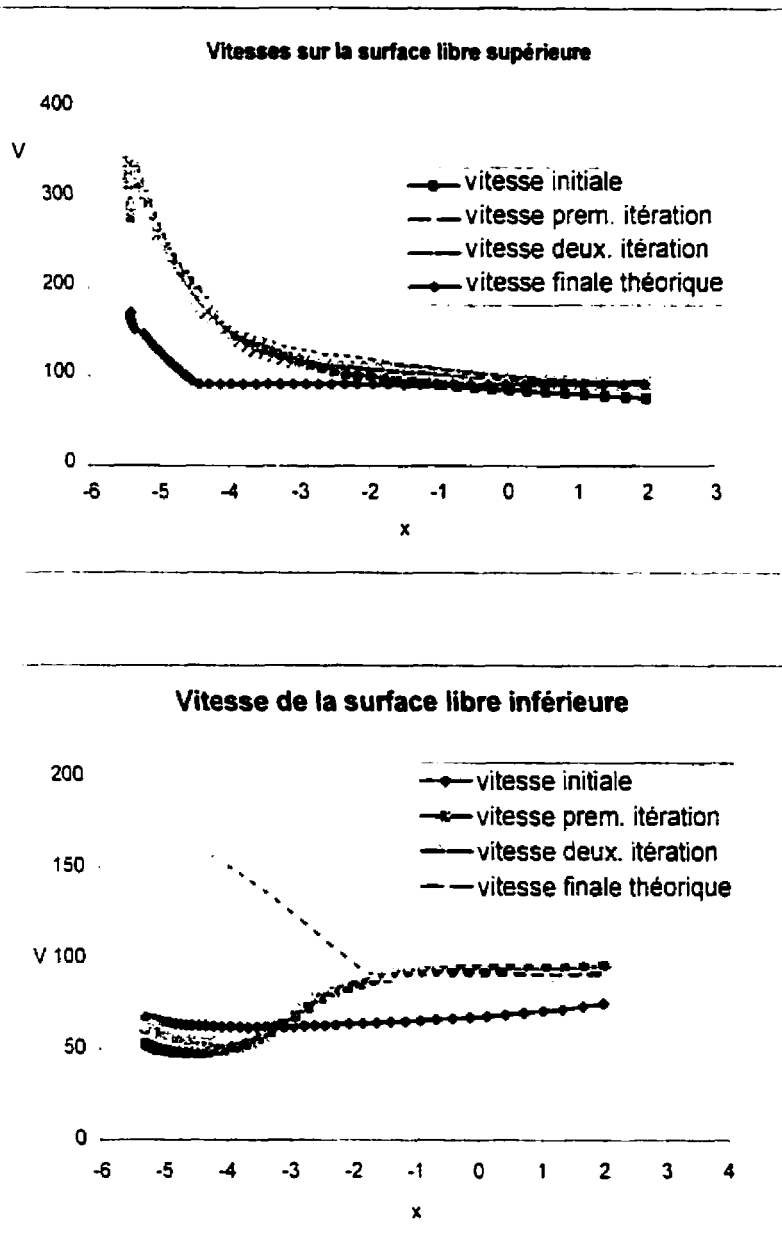


Figure 6.41 : Vitesse sur les surfaces libres

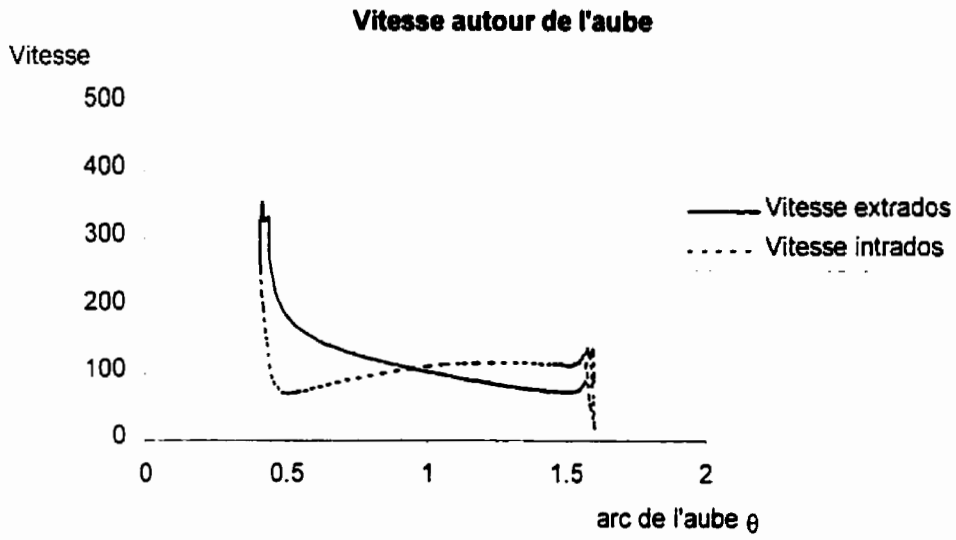


Figure 6.42: Vitesse autour de l'aube

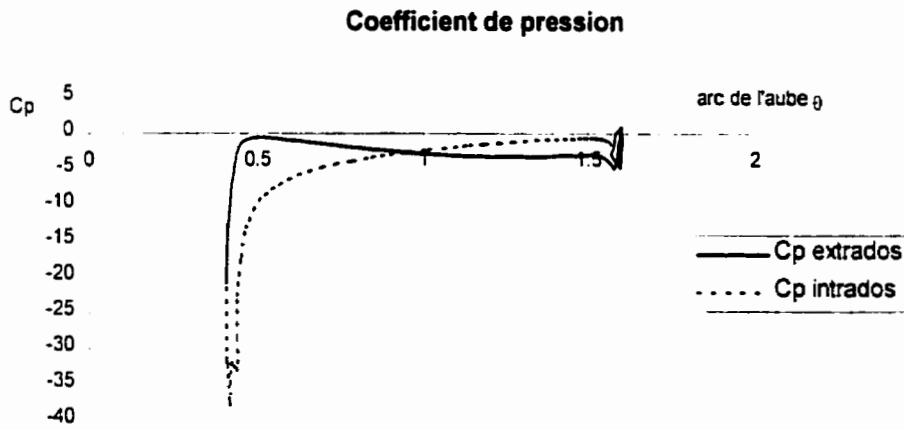


Figure 6.43: Coefficient de pression autour de l'aube

7 CONCLUSION

Le présent travail visait à tenter une approche de la modélisation par éléments finis de l'écoulement dans la turbine Banki.

Un modèle physique simple de l'écoulement, où le fluide est considéré comme monophasique, incompressible et non-visqueux, permettait d'obtenir un champ de potentiel dont était dérivé la vitesse du fluide. Ce modèle tenait compte de la circulation générée par les aubes de la turbine qui se trouvaient dans le volume de fluide. Une procédure additionnelle permettait de localiser la position des surfaces du jet dans la roue et de déterminer ainsi la forme et la position de ce jet.

Comme les caractéristiques physiques du milieu fluide, la géométrie de la turbine a été grandement simplifiée, et ce pour deux raisons. D'abord, le modèle d'écoulement a voulu que le transfert d'énergie dans la roue intervienne dans le calcul de la position des surfaces libres du jet. Cela a exigé qu'on ne considère que le premier passage de l'eau dans l'aubage, alors qu'il devrait y en avoir deux. Traiter deux passages aurait demandé de développer davantage le modèle de l'écoulement pour obtenir les valeurs intermédiaires des vitesses entre les passages. Il aurait fallu poser des hypothèses supplémentaires et rajouter des niveaux d'itération dans la procédure de calcul. Cela semblait peu prometteur, autant au niveau de la précision des résultats que de la faisabilité du calcul.

L'autre raison de simplifier la géométrie est venue de la procédure de localisation des surfaces libres elle-même. Cette procédure demandait de reconstruire le maillage du domaine à chaque pas de calcul, en fonction de l'emplacement des surfaces libres. La présence d'aubes qui auraient intersecté les surfaces libres aurait rendu l'application de cette procédure exagérément lourde. C'est pourquoi le modèle de turbine étudié s'est limité à la tuyère et à une seule aube en mouvement à l'intérieur du jet.

De sévères réserves peuvent aussi être faites sur l'approximation à un modèle stationnaire de l'écoulement dans la turbine Banki. Le modèle utilisé ici souffre d'une

contradiction entre le calcul des conditions locales de l'écoulement (comme les vitesses autour de l'aube), qui sont fortement instationnaires lorsqu'il n'y a, comme ici, qu'une seule aube, et le calcul des caractéristiques globales de l'écoulement (comme la circulation générée ou la forme du jet), qui sont relativement stationnaires. Cette contradiction laisse planer un doute sur la valeur des résultats obtenus. Pour l'écarter, il faudra examiner plus à fond, vraisemblablement dans un cadre expérimental, ces effets instationnaires.

Finalement, l'omission de prendre en compte la présence d'air dans l'écoulement est aussi une faiblesse majeure de l'approximation. L'entraînement d'air a été observée, dans le cadre de nombreux travaux expérimentaux, comme étant un phénomène important dans le jet. Or, il en résulte une augmentation importante du volume de fluide et une transformation de ses propriétés dynamiques. Dès lors, ce sont autant les conditions locales que globales de l'écoulement qui sont affectées, de même que la performance d'ensemble de la turbine.

Ce modèle a permis d'appliquer la méthode des éléments finis à un écoulement qui conservait des caractéristiques importantes de l'écoulement réel de la turbine Banki, comme la présence de surfaces libres et celle des aubes à l'intérieur du jet. Il semble aussi représenter la limite de complexité qu'est capable de traiter de façon pratique l'approche de calcul développée ici. Mais la simplification du problème sur quatre autres caractéristiques importantes de l'écoulement : les effets visqueux, la géométrie de la roue, les effets instationnaires et l'entraînement d'air dans le jet, fait en sorte que le résultat obtenu demeure éloigné de la réalité physique du problème.

Le calcul fait ici a malgré tout le mérite d'avoir permis de jeter un regard nouveau sur la nature de l'écoulement dans la turbine Banki. Et ses résultats, eu égard aux restrictions que nous venons de faire, demeurent probants. Ainsi, même si la forme du jet obtenue ici ne rend pas compte de l'allure réelle du jet dans la roue d'une turbine Banki, les conditions d'écoulement qui sont obtenues à l'intérieur du jet et dans l'ensemble de la zone de calcul gardent une certaine valeur. Même s'il n'y a qu'une seule aube dans la turbine simplifiée, sa présence permet une première approximation des conditions d'écoulement autour des aubes de la turbine réelle, lorsque celles-ci se trouvent à l'intérieur du jet. La prise en compte de la présence d'air, de la présence d'autres aubes, des effets dynamiques instationnaires et de la

forme exacte du jet ne ferait que préciser ce résultat, sans le transformer complètement. Mais dans sa présente mise en œuvre, cette méthode ne saurait atteindre la précision nécessaire pour accompagner de façon fiable une démarche de conception.

Pour atteindre ce niveau de développement, la pratique du calcul des turbines Banki devra arriver à prendre en compte, dans une certaine mesure, les quatre aspects qui ont été laissés de côté ici : les effets visqueux, les effets instationnaires, la géométrie exacte de la roue et la présence d'air dans l'eau. Ce sont quatre obstacles qui, chacun, représentent un défi de taille.

La méthode utilisée ici a tenté de simplifier le problème en séparant le calcul des vitesses dans le milieu fluide de celui de la position des surfaces du jet. Les résultats obtenus et l'exercice même de mise en œuvre ont mis en lumière les faiblesses de cette approche. Pour qu'elle soit praticable, elle devra résoudre deux problèmes. D'abord, celui de l'instabilité qui apparaît dans le calcul itératif de la position des surfaces libres, qui oblige à lisser la courbe des surfaces libres et empêche ainsi de trouver la forme réelle de celles-ci. Ensuite, la reconstruction du maillage à chaque pas de calcul, dans une géométrie complexe faite d'aubes qui traversent les frontières du domaine occupé par le fluide, représente un problème numérique et informatique très difficile. Elle exige l'automatisation du processus de maillage pour pouvoir être praticable. Et c'est là une lourde tâche.

Quelle alternative reste-t-il pour calculer l'écoulement dans la turbine? La construction d'un modèle di-phasique est peut-être une avenue à considérer. Cette approche aurait plusieurs avantages. D'une part, elle permettrait d'utiliser un maillage fixe. Le concept de deux phases dans le milieu fluide permet en effet d'étendre le domaine de calcul au-delà des limites du jet. La position des surfaces libres serait alors obtenue du calcul de la densité du milieu fluide, celle-ci étant nulle hors du jet et unitaire dans l'espace occupé par le fluide. Un raffinement ultérieur du modèle permettrait même d'introduire le phénomène de l'entraînement d'air dans le jet. La contrepartie de cette approche sera la complexité accrue du système d'équations à résoudre et les difficultés de résolution numérique qui l'accompagneront.

Le développement d'une méthode de calcul de la turbine Banki devra donc surmonter de grands obstacles. Parmi ceux-ci, l'obstacle économique n'est pas le moindre. La taille des projets dans laquelle la turbine Banki est utilisée exige généralement de restreindre les coûts d'ingénierie de conception. Cet aspect aura certainement une influence sur le développement de la pratique de conception qui prendra forme dans l'avenir.

L'utilisation de la turbine à grande échelle pourra toutefois inciter les constructeurs à créer des gammes standardisées de turbines. Tirant parti de la symétrie axiale de la turbine, ces gammes verraient une même géométrie de roue être utilisée pour un éventail de débits, à une hauteur de charge donnée. Il suffit en effet d'allonger le rotor dans le sens de l'axe pour ajuster la roue au débit à traiter. C'est peut-être cette procédure de standardisation qui, en bout de ligne, déterminera le choix de la méthode de calcul de conception des turbines Banki.

8 BIBLIOGRAPHIE

1. Banki, D., Neue Wasserturbine, Z. Ges. Turbinenwesen, 1918, nos 1-4
2. Sonnek, E.; Theorie der Durchstromturbine, Verlag von Julius Springer. 55p., Berlin. 1923
3. Van Leer, B. R., Some interesting European hydraulic turbine research. Transactions ASME, vol. 51, 1929
4. Mockmore, C. A., Merryfield, F., The Banki water turbine, Bulletin no. 25, Engineering Experimental Station, Oregon State University, 1949
5. Shepherd, D. G. Principles of turbomachinery, The Macmillan Co., New York. 1956
6. Varga, J., Tests with the Banki water turbine. Acta Technica. Acad. Scient. Hung., vol. 27, no 1/2. 1959
7. Halmos, L., Jet thickness and radial blading width of Banki turbine, Acta technica. Acad. Scient. Hung., vol. 27, no. 1/2, 1959
8. Haimerl, L. A., The Cross-flow turbine, Water Power, Jan. 1960, pp. 5-13
9. Mosonyi, E. F., Water power development, vol. II, chap. 114, Akademiai Kiado. Acad. Hongr. des Sciences, Budapest, 1963
10. Arter, A., Durschstromturbine, Thèse MS, Ingenieurschule, Zurich, Suisse, 1979
11. Nakase, Y., Fukutomi, J., Watanabe, J., Suetsugu, T., A study of cross-flow turbine (effects of nozzle shape on its performance), éd. Webb, D.R., Whippen, N.G., Papadakis. C.N., Small-power fluid machinery, Winter annual meeting of the ASME, Phoenix, AR. 1982. pp. 13-18
12. Fukutomi, J., Nakase, Y., Watanabe, T., A numerical method of free jet from a cross-flow turbine nozzle. Bulletin of the JSME. Vol. 28 no. 241, Jul. 1985, pp. 1436-1440

13. Fukutomi, J., Senoo, Y., Nakase, Y., A numerical method of flow through a cross-flow turbine, *JSME International Journal, Ser. II*, vol. 34, no. 1, 1991, pp. 44-51
14. Johnson, W., Ely, R., White, F., Design and testing of an inexpensive crossflow turbine, éd. Webb, D.R., Whippen, N.G., Papadakis, C.N., *Small-power fluid machinery*, Winter annual meeting of the ASME, Phoenix, AR, 1982, pp. 129-133
15. Khosrowpanah, S., Albertson, M. L., Fiuzat, A. A., Historical overview of cross-flow turbine, *Water Power and Dam Construction*, Oct. 1984, pp. 38-43
16. Chérière, B., Création d'une gamme de turbines à flux traversant, *La Houille Blanche*, no. 1/2, 1986, pp. 55-62
17. Van Berkel, J., Modelling an adjustable nozzle for the crossflow turbine, *Water Power and Dam Construction*, Apr. 1988, pp. 60-65
18. Kim, J. H., Lee, K. H., A study on the hydraulic performance characteristics of crossflow turbine: analysis and experiments, *Small hydro '88*, 1988
19. Chiatti, G., Ruscitti, R., Performance tests of a new hydraulic impulse turbine, *Small hydro '88*, ASCE, 1988
20. Meier, U., Arter, A., Solving problems of micro hydro development in Nepal, *Water Power and Dam Construction*, June 1989, pp. 9-11
21. Fiuzat, A. A., Khosrowpanah, S., Albertson, M. L., Experimental investigation of the cross flow turbine, in *Water Power '87*, ed. ASCE, 1987, pp. 2174-2180
22. Khosrowpanah, S., Fiuzat, A. A., Albertson, M. L., Experimental study of cross-flow turbine, *Journal of Hydraulic Engineering*, éd. ASCE, 1988
23. Desai, V. R., Aziz, N. M., Fiuzat, A. A., Finding ways to make crossflow turbines more efficient, *Hydro Review*, august 1993
24. Desai, V. R., Aziz, N. M., Parametric evaluation of cross-flow turbine performance, *Journal of Energy Engineering*, éd. ASCE, avril 1994

25. Dhatt, G., Touzot, G., Une présentation de la méthode des éléments finis, PUL/Maloine, 1981
26. Dhatt, G., Batoz, J. L., Modélisation des structures par éléments finis, vol. 1, PUL, 1990
27. Zienkewicz, O. C., The finite element method, vol. 1, Fundamentals, 4th edition, McGraw-Hill, 1989
28. Norrie, D. H., De Vries, G., The finite element method. Fundamentals and applications, Academic Press, New York, 1973
29. Hirsch, C., Numerical computation of internal and external flows, vol. 1, J. Wiley, 1988
30. Argyris, J. H., Mareczek, G., Potentiel flow analysis by finite elements, Ingenieur-Archiv, no. 41, 1972, pp. 1-25
31. Zienkewicz, O. C., Cheung, Y. K., Finite elements in the solution of field problems, The Engineer, Vol. 24, 1965, pp. 507-510
32. Norrie, D. H., De Vries, G., The application of the finite element technique to potential flow problems, Trans. of the ASME, J. of Applied Mechanics, Vol. 38, Series E, no. 4, 1971, pp. 798-802
33. Pironneau, O., Méthode des éléments finis pour les fluides, Paris, Masson, 1988
34. Keck, H., Haas, W., Finite element analysis of quasi-three dimensional flow in turbomachines, in Finite elements in fluids, vol. 4, éd. Gallaher, R. H., Norrie, D. H., Oden, J. T., Zienkewicz, O. C., J. Wiley & Sons Ltd, 1982, pp. 531-550
35. Laskaris, T. E., Finite element analysis of 3-dimensional potential flow in turbomachines, AIAA Journal, vol. 16, 1978, p. 717
36. McNally, W. D., Sockol, P. M., Computational methods for internal flows with emphasis on turbomachinery, Trans. of the ASME, J. of Fluids Engineering, Vol. 107, 1985, pp. 6-22
37. Perkins, H. J., Horlock, J. H., Computation of flows in turbomachines, in Finite elements in fluids, Vol. 2, 1975, pp. 141-157

38. Horlock, J. H., Marsh, H., Flow models for turbomachines, *J. of Mechanical Engineering Science*, Vol. 13, no. 5, 1971, pp. 358-368
39. Combes, J. F., Calcul de l'écoulement tridimensionnel potentiel dans une roue de pompe centrifuge à débit partiel, *La Houille Blanche*, No. 5, 1985, pp. 429-434
40. Southwell, R., Vaisey, G., Relaxation methods applied to engineering problems. XII. Fluid motions characterized by free streamlines, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, Vol. 240, 1948, pp. 117-161
41. Rouse, H., Abul-Fetouh, A., Characteristics of irrotational flow through axially symmetric orifices. *J. of Applied Mechanics*, Vol. 17, no. 4, 1950, pp. 421-426
42. Hunt, B. W., Numerical solution of an integral equation for flow from an circular orifice, *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 31, part 2, 1968, pp. 361-377
43. O'Carrol, M. J., Variational methods for free surfaces of cavitation, jets, open channel flows, separation, and wakes, in *Finite elements in fluids*, vol. 3, éd. Gallaher, R. H., Norrie, D. H., Oden, J. T., Zienkiewicz, O. C., J. Wiley & Sons Ltd, 1978, pp. 293-309
44. Shiffmann, M., On free boundaries of an ideal fluid, *Communications on pure and applied mathematics*, 1948/1949, pp. 89-101
45. Dias, F., Elcrat, A. R., Trefethen, L. N., Ideal jet flow in two dimensions, *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 185, 1987, pp. 275-288
46. Dias, F., Elcrat, A. R., Ideal jet flow with a stagnation streamline, *European J. of Mechanics, Part B/Fluids*, Vol. 11, no.2, 1992, pp. 233-247
47. Chan, S. T. K., Larock, B. E., Fluid flows from axisymmetric orifices and valves, *J. of the Hydr. Div., Proc. of the ASCE*, Jan. 1973, pp. 81-97
48. Larock, B. E., Taylor, C., Computing three-dimensional free surface flows, *International J. for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, 1976, pp. 1143-1152
49. Larock, B. E., Jets from bi-dimensional symmetric nozzles of arbitrary shape. *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 37, part 3, 1969, pp. 479-489

50. Sarpkaya T., Hiriart G., Finite element analysis of jet impingement on axisymmetric curved deflectors, Finite elements in fluids, vol. 1, éd. Gallaher, R. H., Norrie, D. H., Oden , J. T., Zienkiewicz, O. C., J. Wiley & Sons Ltd, 1975, pp. 265-279
51. Brown, J., Houghton, W., Cunningham, T. C., Aerodynamics for engineering students. McGraw-Hill, 1978
52. Prandtl, L., Tietjens, O., Fundamentals of hydro- and aerodynamics. United Engineering Trustees, 1934
53. Milne-Thomson, L. M., Theoretical hydromechanics, 5ième édition, MacMillan, New York, 1968